Discos Delgados en Relatividad General

El estudio de soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell correspondientes a configuraciones discoidales de materia autogravitante es un problema abierto a la investigación. Presenta interés tanto desde el punto de vista de la teoría de la relatividad en si misma, como en el modelado y entendimiento de propiedades físicas de sistemas astrofísicos. En este trabajo se construyen modelos relativistas de discos delgados a partir de soluciones generales de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell. Se presenta una familia infinita de discos de polvo eléctricamente cargados finitos para un espaciotiempo conformestático axisimétrico. También, una familia infinita de discos delgados con un borde interno central constituidos por polvo, su superposición con un agujero negro de Schwarzschild y su versión eléctricamente cargada. Los aspectos tratados aquí se pueden consultar como desarrollos avanzados en relatividad general. Aspectos como las condiciones de juntura y técnicas de obtención de soluciones exactas de sistemas de ecuaciones diferenciales altamente no lineales encuentran en este trabajo una suerte de ejemplos.



Antonio C. Gutiérrez-Piñeres
Doctor en Ciencias Naturales (Física), Master en Física. Desarrolló su pasantía doctoral en el Institute of Theoretical Physics, Charles University, Prague. Guillermo A. González, Doctor en Matemática Aplicada Master en Física. Los autores realizan investigaciones en Relatividad general, astrofísica y matemática aplicada.



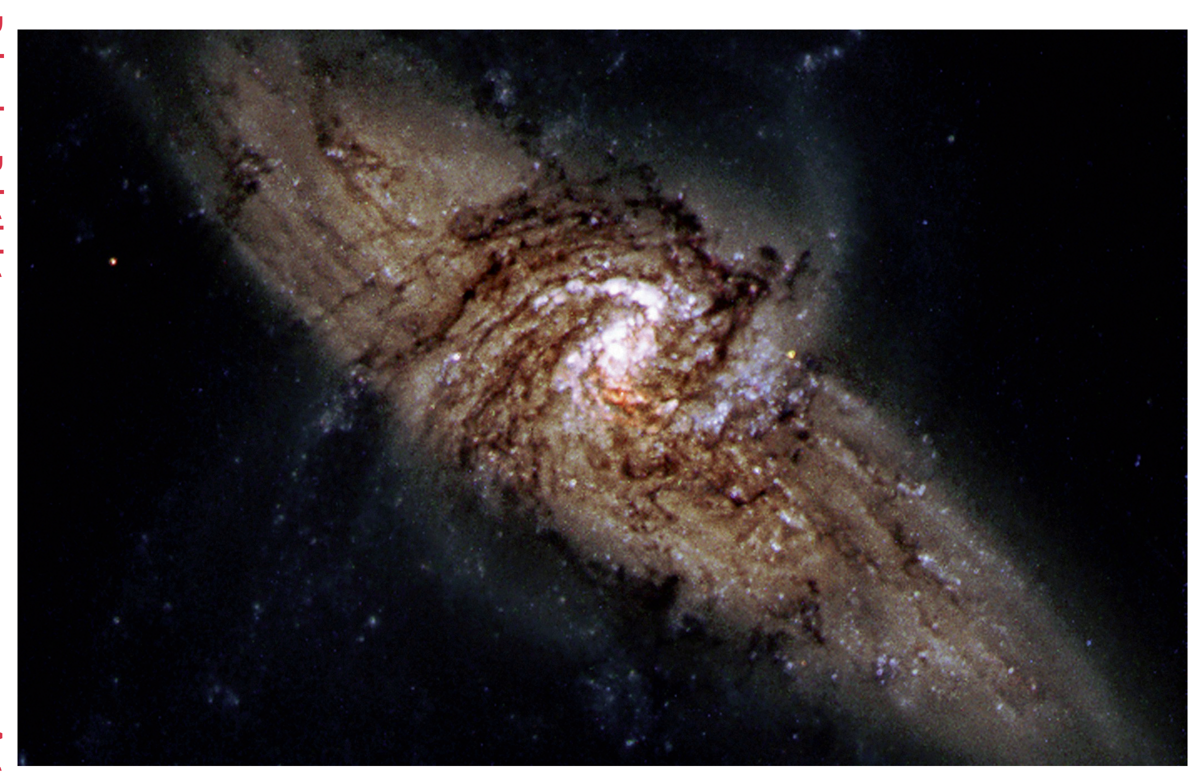
978-3-8484-5039-8

editorial académica española

Discos Delgados Relativistas

Antonio C. Gutiérrez-Piñeres, G.González





Antonio C. Gutiérrez-Piñeres · Guillermo A. González

Discos Delgados en Relatividad General

Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell

Antonio C. Gutiérrez-Piñeres
Guillermo A. González

Discos Delgados en Relatividad General

Antonio C. Gutiérrez-Piñeres
Guillermo A. González

Discos Delgados en Relatividad General

Soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein y Einstein-Maxwell

Editorial Académica Española

Impresión
Información bibliográfica publicada por Deutsche Nationalbibliothek: La Deutsche Nationalbibliothek enumera esa publicación en Deutsche Nationalbibliografie; datos bibliográficos detallados están disponibles en internet en http://dnb.d-nb.de.

Imagen de portada: www.ingimage.com

Editor: Editorial Académica Española es una marca de
LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Alemania
Teléfono +49 681 3720-310, Fax +49 681 3720-3109
Correo Electronico: info@eae-publishing.com

Aprobado por: Gutiérrez-Piñeres Antonio C., Universidad Industrial de Santander, 2009

Publicado en Alemania
Schaltungsdienst Lange o.H.G., Berlin, Books on Demand GmbH, Norderstedt,
Reha GmbH, Saarbrücken, Amazon Distribution GmbH, Leipzig
ISBN: 978-3-8484-5039-8

Imprint (only for USA, GB)
Bibliographic information published by the Deutsche Nationalbibliothek: The Deutsche Nationalbibliothek lists this publication in the Deutsche Nationalbibliografie; detailed bibliographic data are available in the Internet at http://dnb.d-nb.de.

Cover image: www.ingimage.com

Publisher: Editorial Académica Española is an imprint of the publishing house
LAP LAMBERT Academic Publishing GmbH & Co. KG
Heinrich-Böcking-Str. 6-8, 66121 Saarbrücken, Germany
Phone +49 681 3720-310, Fax +49 681 3720-3109
Email: info@eae-publishing.com

Printed in the U.S.A.
Printed in the U.K. by (see last page)
ISBN: 978-3-8484-5039-8

"… Al volver a mi casa busqué el disco. No lo encontré.
Hace años que sigo buscando."

JORGE LUIS BORGES: *El Disco*.
(El Libro de Arena, 1975.)

A los rios Vltava y Guatapurí:
El encanto y lo sublime en el fluir eterno de dos aguas en un mismo Heráclito.

A Manera de Gratitud

Vamos en el *Rojito*, escuchando una vieja canción de Jorge Oñate o De los Zuletas, Lirio Rojo o Matildelina o La Polaca o Río Crecío. Tu sigues la letra de la canción y la repites con voz emocionada; acaso porque te emociona algún recuerdo o estás, como siempre lo manifiestas, muy contento en mi compañía. Nos dirigimos al Estanco Tayrona por una botella de Old-Parr o de Ballantine en este domingo en el que hacen dos horas que llegué a Valledupar. Dejamos a mi madre estallada en sonrisas. En su contentura dice "¿les guardo almuerzo? quizá a que hora vendrán, no vayan a bebé mucho". Me cuentas sobre alguna nueva forma geométrica que ideaste para solucionar algún problema de la Carpintería. En este momento se aguan los ojos de mi emoción que compartimos. Yo te cuento de mis desgastadas noches buscando solución a algún problema de mi trabajo. Y reímos y tomamos un trago de Old-Parr. Tu me insistes en que debemos agradecer siempre al pueblo y a la gente que nos ha ayudado a superarnos. Y encontramos amigos y se rebosan los vasos y se alegra la euforia. A este ritmo ya son las 9 de la noche y transcurrieron casi doce horas desde que salimos de la casa. Ya en ella, mi mamá nos sirve un chivo guisado y yuca cocida. En las conversaciones han quedado interminados muchos temas y tu opinión sobre quien será el próximo rey vallenato, casi nunca desaciertas. En este paso algún suceso me trae nuevamente al presente o a esta otra realidad o más bien a este otro sueño en el que estoy escribiendo los agradecimientos de mi trabajo y no puedo evitar la nostalgia y pienso que sigues conmigo, porque soy una extensión tuya. Mi nostalgia labró este reencuentro que ha sucedido muchas veces.

Como debo seguir, expreso entonces mis gratitudes:

A todo Borges y su poema "El Golem", que me mostraron Praga. A los múltiples libros que es las " Mil y Una Noches", A Cortazar y "Torito" que me han acompañado desde siempre. A Anthony Hopkins en "Hannibal", R.E.M y Louis Armstrong, por su continua cercanía a mi espíritu. En Praga: Al Vltava que trajo a mí a la Bella Teata dibujada en mágicas historias de Tahití y Praga. A cada rincón del antiguo Gheto, en el que busqué el Golem, uno de mis motivos de visita a la hermosa ciudad con su Kafka y sus fantasmas y Smetana. Al proyecto del *Socialismo con Rostro Humano*, que aunque disminuido por la opulencia Rusa del momento, me dejó ver la nostalgia y la fantasía Praguense. Al Grupo de Física Teórica de Charles University, que permitió injertar el mundo Europeo en mi provincia, en el sentido de J. Martí. Especialmente, a Mgr. Martin Scholtz, la pareja Mgr. Norman Gürlebeck and Julia, Mgr. Ivan Pshenichnyuk y Mgr. Michal Tarana, mis amigos en las muchas Cervezas, Vinos y Becherovka, y las pocas Física y Literatura que hemos podido compartir a pesar de mi intrincado english-costeñol. Al Prof. RNDr. Jiří Bičák, DrSc., dr.h.c. que me aceptó entre sus estudiantes y brindó nuevas luces.

En Colombia: a cada una de las partículas que conforman los sistemas y los ríos. A mis amigos de la UIS, particularmente al GIRG, que han tolerado mi diaria *mamadera e gallo*. A la amistad, paciencia, humo, enseñanzas y "... tinto ..." desde el Profesor Guillermo González V. Como siempre, a la fuerza y desmedida amistad de Rafa, Zandra, Tito e Igno. A Laura R. y nuestros recuerdos de mandarinas y guayabas y múltiples lecturas. A la casa de los Nechos y sus *malditas arepas con salchicha*. También a los Nechos, Nando, Eduar, Jesu, David, Vivix, El Pelaito y Gerzzen. A Robbie Burns, Thomas Parr, Christopher, Goyo, Quiceno y Dixon, mis viejos hermanos. Al espíritu crítico del Profesor Oscar Neira. Ahora bien, la literatura me ha mostrado sus alas y me ha dado casi todo lo que tengo, incluyendo la Física. En ese proceso, me fueron mostradas las fraternidades de Hernando Motato, Luz Mary y Harold Paredes, a quienes expreso mis gratitudes. A Roberto y Armando. A la

literatura misma, con el maestro Eduardo Pastrana Rodríguez, que está en cada página que leo.

Gracias también al soporte financiero de *COLCIENCIAS*, la fundación Colombiana que apoya la investigación científica en Colombia, que me impuso una paranoia y una escalera para realizar el Doctorado.

Índice general

Índice de figuras

CAPÍTULO 1

Prolegómenos

Índice

1.1. Naturaleza e Importancia del Problema

La obtención e interpretación de soluciones de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell constituyen una tarea ardua e interesante. Durante los últimos años se ha obtenido, mediante diversos métodos, un gran número de soluciones de estas ecuaciones. Sin embargo, es valido afirmar que, un gran número de ellas no constituyen sino parte de un conjunto de "objetos de colección" dada su difícil interpretación o su limitada importancia física. Una de las características más fundamentales de un sistema aislado en el universo es la simetría axial: soluciones de estas ecuaciones correspondientes a espaciotiempos estacionarios axialmente simétricos, por ejemplo, pueden ser útiles para describir estrellas y galaxias en equilibrio termodinámico [59, 38]. Así pues, el estudio de soluciones, estáticas y soluciones estacionarias, de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell correspondientes a configuraciones discoidales de materia autogravitante axialmente simetríca es un problema realmente atractivo y que permanece abierto a la investigación. Presenta vasto interés en diversos aspectos relevantes tanto desde el punto de vista de la teoría de la relatividad en sí misma, como en el modelado y entendimiento de propiedades físicas de sistemas astrofísicos.

De modo que, una gran suerte de esfuerzos ha sido dedicada al estudio teórico del campo gravitacional generado por fuentes discoidales de materia que pueden modelar ciertos sistemas astrofísicos referenciados en la "literatura observacional". Los discos de materia sin presión, conocidos como discos de polvo, por ejemplo, se estudian en astrofísica como modelos de cierto tipo de galaxias y discos de acreción. Del mismo modo, discos de polvo contrarrotante se estudian para modelar galaxias, por ejemplo $S0$ y Sa [85]. El modelo de discos relativistas también presenta gran importancia en el estudio de superposición de discos de acreción alrededor de agujeros negros, y galaxias con agujeros negros supermasivos en su núcleo; objetos puramente relativistas [71, 48, 1]. De igual manera, discos con presencia de campos electromagnéticos, especialmente campos magnéticos, juegan un papel importante en astrofísica en el contexto de estrellas de neutrones y binarias, enanas blancas y en la formación y evolución de galaxias.

En el contexto de la teoría general de la relatividad, la construcción de soluciónes autoconsistentes físicamente apropiadas para construcción de fuentes materiales y el campo gravitacional creado

por estas fuentes es un problema bastante complicado. Para encontrar tales soluciones, se tienen que imponer y solucionar el problema "externo", un problema con valor en la frontera impuesto sobre las ecuaciones de Einstein (ó de Einstein-Maxwell) cuya solución determina el campo externo, y el problema "interno" cuya solución determina la estructura y la dinámica de la fuente material en su propio campo gravitacional. Las soluciones físicamente razonables tienen que satisfacer algunas condiciones adicionales tales como finitud y positividad de la masa, característica físicamente razonable de materia y extensión geométrica razonable. Existe un caso límite muy interesante. Con fuentes de discos infinitesimalmente delgados, el problema interno se reduce a la formulación de condiciones de frontera propias para la solución externa. Así, en este caso, soluciones autoconsistentes se pueden obtener solucionando el problema externo sujeto a algunas condiciones propias de frontera con el fin de obtener fuentes de materia con algún comportamiento físicamente razonable.

Ahora bien, la obtención de soluciones de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell se puede llevar a cabo numéricamente, perturbativamente o de manera exacta. A pesar del progreso de la relatividad numérica y de que los computadores pueden manejar cierta variedad de asignaciones genéricas, las soluciones numéricas son difíciles de clasificar e interpretar. La solución analítica exacta, por su parte, representa un ideal que, no obstante, es solo asequible mediante simplificaciones sustanciales del problema. Sin embargo, la importancia de abordar problemas físicos, como los mencionados en líneas anteriores, requiere cierta intuición que puede ser ofrecida por soluciones analíticas exactas particulares, las cuales a su vez pueden estimular el análisis de situaciones más generales, al tiempo que permiten discriminar más fácilmente entre una característica anómala y una característica física; así como también especificar dónde están las singularidades, cuál es su característica, si la solución es estable o no, o si es en algunos casos genérica. Asimismo, en el caso de la formulación de una conjetura respecto a una situación general inspirada en una solución analítica exacta particular, encontrar nuevas soluciones analíticas exactas puede jugar un papel importante, verificando, clarificando o modificando la conjetura o, en algunos casos, las soluciones particulares pueden actuar como estados asintóticos de una clase general de modelos y llegar a ser aún más significativas.

Los párrafos anteriores permiten ver la clara importancia que para el desarrollo de la teoría en sí y el conocimiento de las propiedades físicas de sistemas astrofísicos representa la obtención e interpretación de soluciones analíticas exactas de los sistemas de ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell en términos de modelos relativistas de discos delgados.

1.2. Estado General del Tema

Durante las últimas cuatro décadas la obtención y análisis físico de soluciones exactas estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell correspondientes a configuraciones discoidales de materia autogravitante ha suscitado una extensa variedad de trabajos. Estos fueron estudiados inicialmente por Bonnor y Sackfield [8] y Morgan y Morgan [63, 62]. Posteriormente, diferentes autores han obtenido varios tipos de soluciones exactas correspondientes a discos delgados estáticos [93, 60, 13, 56, 50, 6, 7, 28, 22] y estacionarios [61, 5, 69, 29]. Se ha considerado, de igual manera, la superposición de un disco estático o un disco estacionario con un agujero negro [51, 52, 53, 76, 74, 77, 78, 42, 79, 80, 94, 96, 82, 81], discos de fluido perfecto con halo [90], así como también se ha investigado la estabilidad de discos delgados que implican el uso de una perturbación de primer orden en el tensor de energía-momentum [88]. Fuentes discoidales

para espaciotiempos estacionarios axialmente simétricos con campos magnéticos han sido estudiados como fuentes para campos de Kerr-Newman [49], campos magnetostáticos axialmente simétricos [55], mientras que discos de fluidos perfectos cargados fueron estudiados por Vogt y Letelier [91], y discos de fluido perfecto cargado como fuentes de espaciotiempos tipo Taub-NUT por García-Reyes y González [19, 20].

En los casos anteriores, los discos se obtienen mediante un método tipo "problema inverso". Para discos sin campo electromagnético el método se puede describir de la siguiente manera: se toma una solución de las ecuaciones de Einstein, de modo que exista una discontinuidad en las derivadas del tensor métrico en la superficie del disco, posteriormente se obtiene el tensor energía-momentum a partir de las ecuaciones de Einstein. Finalmente, se estudian las propiedades físicas de la distribución de materia mediante un análisis del tensor energía-momentum así obtenido. El método se puede extender al caso en que los discos en consideración presenten campo electromagnético. En este caso, se toma una solución de las ecuaciones de Eistein-Maxwell en el vacío y, las condiciones exigidas sobre el tensor métrico en la superficie del disco son las mismas que para el caso anterior. Los discos también se pueden estudiar de manera "directa": se da el tensor energía-momentum de la fuente y luego se resuelven las ecuaciones de Einstein. Este último método ha sido utilizado por algunos autores para obtener discos de polvo [67, 44, 47, 46, 17, 45].

Ahora bien, mediante el método de problema inverso se puede no solo obtener, con relativa facilidad, discos delgados con tensores de energía-momentum que presentan suficiente generalidad, sino también usar esta construcción para lograr interpretaciones de soluciones de las ecuaciones de Einstein (Einstein-Maxwell) conocidas, en el sentido que los discos pueden actuar como fuentes exactas para métricas de espacios dados por soluciones de vacío (electrovacío). De otro lado, cuando se usa el método de problema inverso en el caso estático, el tensor energía-momentum es diagonal y, su análisis es directo. Por ello, la mayoría de autores considera discos estáticos y, excepto para discos de polvo, todos los discos obtenidos poseen fuentes anisótropas con esfuerzo azimutal diferente del esfuerzo radial. De otro lado, cuando el espaciotiempo en consideración es estacionario, el tensor energía-momentum que se obtiene es no diagonal y el análisis de su contenido físico es menos trivial y, en general, la fuente obtenida es no solo anisótropa sino además con flujo de calor. Debido a este hecho, existen muy pocos trabajos acerca de discos estacionarios y, ellos están limitados, en general, a discos obtenidos con soluciones tales que este no presente flujo de calor [61, 5, 69]. En realidad, solo en un trabajo se considera discos con flujo de calor, pero solo se hizo un análisis parcial del tensor energía-momentum [29].

También existe una interpretación alternativa de los discos obtenidos. Esta interpretación se logra mediante el modelo de contrarrotación (CRM), en el cual el tensor energía-momentum de la fuente se expresa como la superposición de dos fluidos perfectos contrarrotantes. Ahora, aunque esta interpretación se puede ver como meramente teórica, existe evidencia observacional de discos constituidos por corrientes de materia rotante y contrarrotante [73, 72, 4, 83]. En el caso estático, la interpretación del CRM no solo se puede usar para describir una fuente constituida por dos componentes isótropos, sino también para simular efectos rotacionales verdaderos. Un estudio detallado del CRM para discos delgados estáticos relativistas genéricos se presenta en [22], aquí los autores obtienen expresiones para todas las cantidades físicas que caracterizan el modelo. Hasta ahora, sólo se ha logrado cierto avance en lo concerniente al estudio del CRM para fuentes de campos electromagnéticos y gravitacionales que actúan como discos sin presión radial [18] y discos con presión radial [20]. En ambos casos los discos son estáticos y utilizan para su interpretación física, el método de problema inverso.

De otra parte, el CRM para discos delgados estacionarios no se ha desarrollado completamente y solo una versión preliminar de éste se presenta en la referencia [29]. En el trabajo mencionado, los autores consideran que el CRM se puede aplicar solo en casos en los que no existe flujo de calor y el esfuerzo azimutal es positivo (presión). Estas condiciones, sin embargo, son muy restringentes y, en muchos casos, se tienen discos que concuerdan con ello solo en una región parcial. Entonces, el CRM será válido solo como una interpretación parcial de los discos correspondientes. En un trabajo en desarrollo [26] los autores demuestran que estas condiciones no son necesarias e interpretan el CRM para discos delgados estacionarios axialmente simétricos con flujo de calor y esfuerzo azimutal arbitrario.

Ahora bien, resultan particularmente interesantes los trabajos correspondientes a discos de polvo en espaciotiempos conformestáticos [92, 43]. En este caso, la densidad de carga del disco es igual a su densidad de masa y así, las fuerzas eléctricas y gravitacionales se encuentran en perfecto balance. Esta clase de configuraciones de equilibrio han sido llamadas por algunos autores "discos eléctricamente contrapuestos" (ECD) y han sido estudiados con cierto detalle tanto por teorías clásicas como relativistas en [11, 9, 10, 32, 89]. Ahora, como el contenido material de la fuente es polvo, probablemente el tensor energía-momentum correspondiente estará siempre en acuerdo con las condiciones de energía, un hecho que es particularmente importante para los modelos de discos relativistas delgados. En efecto, como se puede ver en algunos de los trabajos anteriormente mencionados, existen muchos modelos de discos relativistas delgados que no están de acuerdo con estas condiciones y también muchos que cumplen sólo parcialmente con ellas. Los discos delgados conformestáticos presentados en [92, 43] fueron obtenidos por medio del bien conocido método de "desplazamiento, corte y reflexión" con el fin de introducir una discontinuidad en la primera derivada de una solución suave. El resultado será entonces una solución con una singularidad tipo función delta de Dirac en la hipersuperficie $z = 0$, que puede ser interpretada como un disco infinito delgado. De otro lado, las soluciones que pueden ser interpretadas como discos delgados de extensión finita se pueden obtener si se introduce un sistema coordenado propio. Un sistema coordenado que se adapte naturalmente a una fuente finita y presenta las condiciones de discontinuidad requeridas son las coordenadas esferoidales oblatas. Algunos ejemplos de soluciones que representan discos delgados finitos expresados en términos de estas coordenadas se pueden encontrar en [8, 63, 93, 56].

Los datos observacionales que soportan la existencia de agujeros negros en los núcleos de algunas galaxias, incluyendo los que registran la fuerte dinámica asociada a la evidencia dinámica generada por la fuerte interacción del resto de la Vía Láctea con su centro, de modo que no hay duda de la relevancia del estudio de sistemas binarios compuestos por un disco delgado que rodea un agujero negro (ver [12, 3] si se quiere apreciar recientes revisiones sobre datos observacionales). Por consecuencia, durante los últimos años, un gran número de trabajos ha sido desarrollado con el fin de obtener cada vez mejor información acerca de los aspectos relacionados con la dinámica de estos sistemas (ver [75, 42] para una revisión de los trabajos más relevantes). Ahora, debido a la presencia de un agujero negro, los campos gravitacionales presentes son tan fuertes que el marco teórico propio para el estudio de estas configuraciones lo constituye la teoría general de la relatividad. Por consecuencia, un gran esfuerzo ha sido dedicado a la obtención de soluciones de las ecuaciones de Eistein y de Einstein-Maxwell correspondientes a fuentes discoidales delgadas con un agujero negro central.

Las soluciones estacionarias y axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell constituyen la mejor elección cuando el fin es describir analíticamente los campos gravitacionales debido a discos alrededor de agujeros negros. Asimismo, tales espaciotiempos son de clara

importancia astrofísica, dado que ellos describen la configuración de equilibrio en la región exterior de sistemas rotantes. Así que, a través de los años muchos ejemplos de soluciones correspondientes a agujeros negros o a fuentes discoidales delgadas han sido obtenidos mediante diferentes técnicas. Sin embargo, debido al carácter no lineal de las ecuaciones de Einstein, soluciones correspondientes a la superposición de agujeros negros y discos delgados no son fáciles de obtener. De modo que, hasta ahora, soluciones exactas estacionarias correspondientes a este tipo de configuraciones no han sido obtenidas.

Si se consideran discos delgados que se extienden más allá del horizonte de eventos, la materia localizada cerca el agujero se moverá con velocidades superlumínicas, tal como fue demostrado por Lemos y Letelier [51, 52, 53]. Así, con el fin de evitar la aparición de materia tachyonica, los discos delgados deben de tener un borde interno con un radio mayor que el radio fotónico del agujero negro. Así que, el problema de valor en la frontera para la ecuación de Laplace es más complicado y por consecuencia muy pocas soluciones han sido obtenidas. Esta clase de soluciones fue estudiada primeramente por Lemos y Letelier [52] haciendo una transformación de Kelvin con el fin de invertir la familia de discos finitos de Morgan-Morgan [63]. Ahora, aunque la segunda función métrica de esta solución no puede obtenerse analíticamente, su principal propiedad fue analizada ampliamente en una serie de trabajos por Semerák, Žáček y Zellerin [82, 81, 80, 79, 74, 94, 77], mediante computación numérica.

Aparte de los discos invertidos de Lemos y Letelier, sólo otras dos soluciones para discos estáticos con borde interno han sido obtenidas. La una con discos isócronos invertidos [44] y la otra con una “power-law density” [78]. Mientras que Zellerin y Semerák [96] obtuvieron una superposición estacionaria usando el método de Inverse-scattering de Belinskii-Zakharov; no obstante, el análisis de sus propiedades es complicado dado que las funciones métricas no pueden ser obtenidas analíticamente. Además, esta solución implica una superficie sin sentido físico definida entre el horizonte del agujero negro y el disco [75]. Finalmente, una clase general de soluciones estacionarias fue presentada por Klein [46], mediante el uso de técnicas de superficie de Riemann, por medio de la cual sistemas disco-agujero negro físicamente aceptable se puede hallar, en principio.

Ahora, una característica común entre todas las soluciones anteriormente mencionadas es que sus funciones métricas no pueden ser completamente calculadas analíticamente. Entonces, el análisis de sus propiedades matemáticas y físicas es muy complicado. Además, casi todas las soluciones presentan singularidades en el borde del disco, quizá la única excepción la constituye el tipo de soluciones presentadas por Klein [46]. La presencia de estas singularidades en casi todas las soluciones obtenidas ha sido considerada por algunos autores estrechamente conectadas con la no física delgadez infinita de la fuente. Sin embargo, tal como se verá más adelante, si el correspondiente problema de valor en la frontera se soluciona apropiadamente, es posible obtener una familia completa de soluciones libres de singularidades.

1.3. Propósito y Organización del Presente Trabajo de Investigación

El objetivo central del presente trabajo es la construcción de modelos relativistas de discos delgados a partir de soluciones exactas de las ecuaciones de campo de Einstein y de Einstein-Maxwell. Para tal fin, en primera instancia, se considerarán soluciones axialmente simétricas de dichas ecua-

ciones en las cuales la primera derivada del tensor métrico y del potencial electromagnético presentan una discontinuidad finita a través de un disco delgado. Dada entonces una solución con las propiedades anteriores, se obtendrán el tensor de energía-momentum superficial y la densidad de corriente superficial de la distribución de materia por medio del formalismo necesario para el tratamiento de las ecuaciones de Einstein y de Einstein-Maxwell en términos de distribuciones tensoriales.

Las propiedades físicas de la distribución de materia se estudiarán entonces mediante un análisis detallado del tensor de energía-momentum superficial, considerando soluciones suficientemente generales de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que describan una distribución superficial de materia no sólo anisótropa, sino que además presente flujo de calor. Igualmente, se presentará una interpretación alternativa de tales discos con base en el modelo de contrarrotación, en el cual el tensor de energía-momentum superficial y la densidad superficial de corriente se expresan en términos de la superposición de dos fluidos perfectos contrarrotantes.

Así, el Capítulo 2 expone un formalismo suficientemente general a partir del cual se interpretan ciertas soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de modelos relativistas de discos delgados. Se presenta un análisis detallado del tensor energía-momentum superficial (SEMT) correspondiente discos delgado estacionarios axialmente simétricos. Se considera la clase mas general de discos delgados estacionarios con presión radial y flujo de calor diferentes de cero. Se analiza el contenido físico del SEMT y se obtienen las expresiones para la velocidad, densidad de energía, densidad de corriente eléctrica, esfuerzos principales y flujo de calor. También se presenta el Modelo de Cotrarrotación (CRM) con el fin de interpretar estos discos considerándose el SEMT como la superposición de dos fluidos perfectos contrarrotantes. Se obtiene una condición sobre la velocidad tangencial, necesaria para la descomposición del tensor energía-momentum, y se obtienen entonces expresiones para las densidades de energía y las presiones. Se considera la posibilidad de contrarrotación a lo largo de electrogeodésicas, así como la contrarrotación con velocidades iguales y opuestas. Mediante la escogencia dada para las velocidades de contrarrotación, se obtienen expresiones explícitas para las densidades de energía y presiones de los fluidos contrarrotantes.

En el Capítulo 3 se presenta una familia infinita de discos de polvo cargados eléctricamente, axialmente simétircos de extensión finita. Con el fin de obtener estas soluciones de discos delgados finitos, se solucionan primero las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espaciotiempos conformestáticos asumiéndose que la función métrica y el potencial eléctrico mantienen una dependencia funcional y que la función métrica depende funcionalmente de otra función auxiliar, la cual se toma del conjunto de soluciones de la ecuación de Laplace. Como se puede ver en [33] este procedimiento es bastante útil dado que se pueden obtener "nuevas soluciones" a partir de ciertas soluciones "semilla" apropiadas y, el álgebra en el proceso es particularmente simple. Del conjunto soluciones de la ecuación de Laplace conocido, se toma aquí como función auxiliar las dadas por la familia infinita de discos de Kalnajs generalizados obtenidos por González y Reina [30], expresadas en términos de las coordenadas esferoidales oblatas y que corresponden a una bien comportada familia newtoniana de discos axialmente simétricos de radio finito.

En el Capítulo 4 se presenta una familia infinita de soluciones exactas nuevas correspondientes a discos delgados con un borde interno central constituidos por polvo. Estas soluciones describen discos cuya densidad de energía es siempre positiva y bien comportada, de modo que su tensor energía-momentum está en completo acuerdo con todas las condiciones de energía. Ahora, aunque los discos son de extensión infinita, todos ellos tienen masa finita. Además, las soluciones son asintóticamente planas y regulares en todas partes, tal como se demostrará mediante el cálculo de todos los escalares

de curvatura. En dicho capítulo también se presenta la superposición completa de esta familia de soluciones con un agujero negro de Schwarschild, ampliando los detalles presentados por González and Gutiérrez-Piñeres en [31]. La solución obtenida representa un disco anular delgado infinito (un disco con un borde interno) alrededor de un agujero negro de Scchwarzschild. La masa del disco es finita y el tensor de energía-momentum cumple con todas las condiciones de energía. La solución puede interpretarse también como si describiera un disco delgado constituido por dos fluidos de polvo contrarrotantes que satisfacen también las condiciones de energía.

En el Capítulo 5 se presenta, lo que constituye, hasta donde se sabe, la primera familia infinita de soluciones exactas completamente integradas explícitamente de las ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondientes a la superposición de un disco de polvo contrarrotante con un agujero negro. Las soluciones obtenidas representan la superposición cargada de un disco infinito delgado anular alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La masa total del disco es finita y el tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. Además los estados asintóticos de la superposición cargada se reducen a la superposición sin carga eléctrica descrita en el capítulo anterior. La solución puede interpretarse como la descripción de un disco constituido por fluidos provistos de carga eléctrica contrarrotando alrededor de un agujero negro y que, están también en completo acuerdo con las condiciones de energía. Como parte final se presentan las principales conclusiones del trabajo.

CAPÍTULO 2

Modelos Relativistas de Discos Delgados con Campo Electromagnético

---

Índice

2.1. Introducción

Con el fin de obtener soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell interpretables como discos delgados estacionarios axialmente simétricos con campo electromagnético se puede tomar, como punto de partida, el elemento de linea de Weyl-Lewis-Papapetrou [84], en coordenadas cilíndricas $x^a = (t, \varphi, r, z)$,

$$ds^2 = -\, e^{2\Phi}(dt + \mathcal{W} d\varphi)^2 \;+\; e^{-2\Phi}[\mathcal{R}^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \tag{2.1}$$

donde Φ, Λ, $\mathcal{W}$ y $\mathcal{R}$ son funciones de r y z únicamente. Por naturaleza cilíndrica de las coordenadas [63] se entiende que $r = 0$ sobre el eje de simetría y, para z fijo, r crece monótonamente al infinito; mientras que, para r fijo, z crece monótonamente en el intervalo $(-\infty, \infty)$. La coordenada φ varía en el intervalo usual $[0, 2\pi)$.

El sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío, en unidades geometrizadas tales que $c = 8\pi G = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$, está dado por

$$G^{ab} \;=\; T^{ab}, \tag{2.2a}$$

$$T_{ab} \;=\; F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4} g_{ab} F_{cd} F^{cd}, \tag{2.2b}$$

$$F^{ab}{}_{;b} = 0, \tag{2.2c}$$

$$F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a, \tag{2.2d}$$

donde todos los símbolos tienen el sentido usual.

Para la métrica (2.1), el sistema anterior puede ser escrito explícitamente como

$$\mathcal{R}_{,rr} \; + \; \mathcal{R}_{,zz} = 0, \tag{2.3a}$$

$$\begin{aligned} & e^{4\Phi}\mathcal{R}^{-2}[\mathcal{R}(\mathcal{W}A_{,r} - \mathcal{W}^2\psi_{,r})_{,r} + \mathcal{R}(\mathcal{W}A_{,z} - \mathcal{W}^2\psi_{,z})_{,z} - (\mathcal{W}A_{,r} - \mathcal{W}^2\psi_{,r})(\mathcal{R}_{,r} - 2\mathcal{R}\Phi_{,r}) \\ & - (\mathcal{W}A_{,z} - \mathcal{W}^2\psi_{,z})(\mathcal{R}_{,z} - 2\mathcal{R}\Phi_{,z})] + (\mathcal{R}\psi_{,r})_{,r} + (\mathcal{R}\psi_{,z})_{,z} - 2\mathcal{R}(\psi_{,r}\Phi_{,r} + \psi_{,z}\Phi_{,z}) = 0, \end{aligned} \tag{2.3b}$$

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}\left[(\mathcal{W}\psi_{,r})_{,r} + (\mathcal{W}\psi_{,z})_{,z}\right] + (\mathcal{R}_{,r} - 2\mathcal{R}\Phi_{,r})(A_{,r} - \mathcal{W}\psi_{,r}) + (\mathcal{R}_{,z} - 2\mathcal{R}\Phi_{,z})(A_{,z} - \mathcal{W}\psi_{,z}) \\ & - \mathcal{R}(A_{,rr} + A_{,zz}) = 0, \end{aligned} \tag{2.3c}$$

$$\begin{aligned} & e^{6\Phi}(\mathcal{W}_{,r}^2 + \mathcal{W}_{,z}^2) - e^{4\Phi}\left[(A_{,r} - \mathcal{W}\psi_{,r})^2 + (A_{,z} - \mathcal{W}\psi_{,z})^2\right] + 2\mathcal{R}e^{2\Phi}\left[(\mathcal{R}\Phi_{,r})_{,r} + (\mathcal{R}\Phi_{,z})_{,z}\right] \\ & - \mathcal{R}^2(\psi_{,r}^2 + \psi_{,z}^2) = 0, \end{aligned} \tag{2.3d}$$

$$\begin{aligned} & e^{2\Phi}\left[4(\Phi_{,r}\mathcal{W}_{,r} + \Phi_{,z}\mathcal{W}_{,z}) + \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{W}_{,r})_{,r} + \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{W}_{,z})_{,z}\right] - 2(A_{,r}\psi_{,r} + A_{,z}\psi_{,z}) \\ & + 2\mathcal{W}(\psi_{,r}^2 + \psi_{,z}^2) = 0, \end{aligned} \tag{2.3e}$$

$$\begin{aligned} & e^{4\Phi}(\mathcal{W}_{,r}^2 - \mathcal{W}_{,z}^2) - 2e^{2\Phi}\left[(A_{,r} - \mathcal{W}\psi_{,r})^2 - (A_{,z} - \mathcal{W}\psi_{,z})^2\right] + 2\mathcal{R}^2e^{-2\Phi}(\psi_{,r}^2 - \psi_{,z}^2) \\ & + 4\mathcal{R}\left[(\Lambda_{,r}\mathcal{R}_{,r} - \Lambda_{,z}\mathcal{R}_{,z}) - \mathcal{R}(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2) + \mathcal{R}_{,zz}\right] = 0, \end{aligned} \tag{2.3f}$$

$$\begin{aligned} & e^{4\Phi}\mathcal{W}_{,r}\mathcal{W}_{,z} - 2e^{2\Phi}(A_{,r} - \mathcal{W}\psi_{,r})(A_{,z} - \mathcal{W}\psi_{,z}) + 2\mathcal{R}[\Lambda_{,r}\mathcal{R}_{,z} \; + \; \Lambda_{,z}\mathcal{R}_{,r} \; - \; \mathcal{R}_{,rz} \\ & - 2\mathcal{R}\Phi_{,r}\Phi_{,z}] \; + \; 2\mathcal{R}^2e^{-2\Phi}\psi_{,r}\psi_{,z} = 0, \end{aligned} \tag{2.3g}$$

donde $A_a = (\psi, A, 0, 0)$ es el 4-potencial electromagnético, cuya dependencia funcional es sólo de las variables r y z.

Ahora bien: de (2.3a) se puede ver que la función $\mathcal{R}(r,z)$ satisface la ecuación de Laplace, de modo que se la puede pensar como la parte real de una función analítica $\mathcal{F}(\zeta) = \mathcal{R}(r,z) + i\mathcal{Z}(r,z)$, donde $\zeta = r + iz$. Por consecuencia, la función $\mathcal{F}(\zeta)$ define una transformación conforme de las coordenadas,

$$\begin{aligned} r \;&\rightarrow\; \mathcal{R}(r,z), \\ z \;&\rightarrow\; \mathcal{Z}(r,z), \end{aligned} \tag{2.4}$$

de tal forma que la métrica (2.1) puede ser escrita, en las nuevas coordenadas, como

$$ds^2 = -\, e^{2\Psi}(dt + \mathcal{A}d\varphi)^2 \; + \; e^{-2\Psi}[\mathcal{R}^2 d\varphi^2 + e^{2\Pi}(d\mathcal{R}^2 + d\mathcal{Z}^2)], \tag{2.5}$$

donde el conjunto de funciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}(r,z) &= \mathrm{Re}\,\mathcal{F}(\zeta), && (2.6a)\\
\mathcal{Z}(r,z) &= \mathrm{Im}\,\mathcal{F}(\zeta), && (2.6b)\\
\Phi(r,z) &= \Psi(\mathcal{R},\mathcal{Z}), && (2.6c)\\
\mathcal{W}(r,z) &= \mathcal{A}(\mathcal{R},\mathcal{Z}), && (2.6d)\\
\Lambda(r,z) &= \Pi(\mathcal{R},\mathcal{Z}) + \ln|\mathcal{F}'(\zeta)|, && (2.6e)\\
\psi(r,z) &= \psi(\mathcal{R},\mathcal{Z}), && (2.6f)\\
A(r,z) &= A(\mathcal{R},\mathcal{Z}), && (2.6g)
\end{aligned}$$

satisfacen el sistema

$$\begin{aligned}
&e^{4\Psi}\mathcal{R}^{-2}[\mathcal{R}(\mathcal{A}A_{,\mathcal{R}} - \mathcal{A}^2\psi_{,\mathcal{R}})_{,\mathcal{R}} + \mathcal{R}(\mathcal{A}A_{,\mathcal{Z}} - \mathcal{A}^2\psi_{,\mathcal{Z}})_{,\mathcal{Z}} - (\mathcal{A}A_{,\mathcal{R}} - \mathcal{A}^2\psi_{,\mathcal{R}})(1 - 2\mathcal{R}\Psi_{,\mathcal{R}})\\
&\quad + 2\mathcal{R}\Psi_{,\mathcal{Z}}(\mathcal{A}A_{,\mathcal{Z}} - \mathcal{A}^2\psi_{,\mathcal{Z}})] + (\mathcal{R}\psi_{,\mathcal{R}})_{,\mathcal{R}} + (\mathcal{R}\psi_{,\mathcal{Z}})_{,\mathcal{Z}} - 2\mathcal{R}(\psi_{,\mathcal{R}}\Psi_{,\mathcal{R}} + \psi_{,\mathcal{Z}}\Psi_{,\mathcal{Z}}) = 0, \qquad (2.7a)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\mathcal{R}^{-1}\mathcal{A}\psi_{,\mathcal{R}} - (\mathcal{A}\psi_{,\mathcal{R}})_{,\mathcal{R}} - (\mathcal{A}\psi_{,\mathcal{Z}})_{,\mathcal{Z}} + \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}A_{,\mathcal{R}})_{,\mathcal{R}} + \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}A_{,\mathcal{Z}})_{,\mathcal{Z}}\\
&\qquad + 2\Psi_{,\mathcal{R}}(A_{,\mathcal{R}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{R}}) + 2\Psi_{,\mathcal{Z}}(A_{,\mathcal{Z}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{Z}}) = 0, \qquad (2.7b)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{6\Psi}(\mathcal{A}_{,\mathcal{R}}^2 + \mathcal{A}_{,\mathcal{Z}}^2) - e^{4\Psi}\left[(A_{,\mathcal{R}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{R}})^2 + (A_{,\mathcal{Z}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{Z}})^2\right] - \mathcal{R}^2(\psi_{,\mathcal{R}}^2 + \psi_{,\mathcal{Z}}^2)\\
&\qquad + 2\mathcal{R}e^{2\Psi}\left[(\mathcal{R}\Psi_{,\mathcal{R}})_{,\mathcal{R}} + (\mathcal{R}\Psi_{,\mathcal{Z}})_{,\mathcal{Z}}\right] = 0, \qquad (2.7c)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{2\Psi}\left[4(\Psi_{,\mathcal{R}}\mathcal{A}_{,\mathcal{R}} + \Psi_{,\mathcal{Z}}\mathcal{A}_{,\mathcal{Z}}) + \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{A}_{,\mathcal{R}})_{,\mathcal{R}} + \mathcal{R}(\mathcal{R}^{-1}\mathcal{A}_{,\mathcal{Z}})_{,\mathcal{Z}}\right] + 2\mathcal{A}(\psi_{,\mathcal{R}}^2 + \psi_{,\mathcal{Z}}^2)\\
&\qquad - 2(A_{,\mathcal{R}}\psi_{,\mathcal{R}} + A_{,\mathcal{Z}}\psi_{,\mathcal{Z}}) = 0, \qquad (2.7d)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{6\Psi}(\mathcal{A}_{,\mathcal{R}}^2 - \mathcal{A}_{,\mathcal{Z}}^2) - 2e^{4\Psi}\left[(A_{,\mathcal{R}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{R}})^2 + (A_{,\mathcal{Z}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{Z}})^2\right] + 2\mathcal{R}^2(\psi_{,\mathcal{R}}^2 - \psi_{,\mathcal{Z}}^2)\\
&\qquad + 4\mathcal{R}e^{2\Psi}\left[\Pi_{,\mathcal{R}} - \mathcal{R}(\Psi_{,\mathcal{R}}^2 - \Psi_{,\mathcal{Z}}^2)\right] = 0, \qquad (2.7e)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&e^{6\Psi}\mathcal{A}_{,\mathcal{R}}\mathcal{A}_{,\mathcal{Z}} - 2e^{4\Psi}(A_{,\mathcal{R}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{R}})(A_{,\mathcal{Z}} - \mathcal{A}\psi_{,\mathcal{Z}}) + 2e^{2\Psi}\mathcal{R}\left[\Pi_{,\mathcal{Z}} - 2\mathcal{R}\Psi_{,\mathcal{R}}\Psi_{,\mathcal{Z}}\right]\\
&\qquad + 2\mathcal{R}^2\psi_{,\mathcal{R}}\psi_{,\mathcal{Z}} = 0, \qquad (2.7f)
\end{aligned}$$

que representa el conjunto de ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío para un espaciotiempo estacionario axialmente simétrico en coordenadas canónicas de Weyl, cuyos métodos de solución se conocen ampliamente [84].

Ahora, con el fin de obtener una solución interpretable como el campo exterior de un disco delgado con campo electromagnético, se supone que Φ, Λ, $\mathcal{W}$ y $\mathcal{R}$ son funciones simétricas de z y que las primeras derivadas del tensor métrico son discontinuas en el plano $z = 0$. Soluciones con este tipo de comportamiento se pueden obtener por diferentes caminos mediante la elección apropiada de soluciones del sistema (2.7) y la función analítica $\mathcal{F}(\zeta)$.

Un procedimiento comúnmente utilizado es el denominado método de "desplazamiento, corte y reflexión". El método consiste en lo siguiente: se toman $\mathcal{F}(\zeta) = \zeta$ y cualquier solución arbitraria

del sistema (2.7), la cual en general no posee la simetría de reflexión requerida. Luego, con el fin de obtener la simetría de reflexión requerida, se hace la transformación $z \to |z| + z_0$, donde z_0 es una constante positiva. El resultado será entonces una solución con una singularidad tipo función delta en $z = 0$, la cual se puede interpretar como un disco delgado infinito con campo electromagnético. Algunos ejemplos se pueden ver en las referencias [18, 55, 91]. Mientras que soluciones interpretables como discos delgados infinitos pero sin campo electromagnético, obtenidas mediante este mismo procedimiento, se presentan en [5, 6, 7, 29].

Las soluciones logradas mediante el método de "desplazamiento, corte y reflexión" son, en cierto sentido, artificiales; dado que estas se obtienen por medio de una transformación geométrica. Una clase de soluciones "naturales" se puede obtener apropiadamente mediante la solución de un problema de frontera. Para ello, se toma $\mathcal{F}(\zeta) = \zeta$ y se introducen las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales son adaptadas naturalmente a una fuente discoidal y cumplen con el requisito de la discontinuidad. Posteriormente se escogen soluciones del sistema (2.7) que satisfagan las condiciones de frontera apropiadas en coordenadas esferoidales oblatas. Las soluciones obtenidas se pueden interpretar como discos delgados finitos sin presión radial y, en ausencia de campo electromagnético, corresponden a la familia de discos de Morgan-Morgan [63, 62]. Con base en estas soluciones, usando métodos estándar de generación de soluciones, se pueden obtener modelos de discos con campo electromagnético [36].

Una clase más general de soluciones "naturales" que representan discos delgados se obtiene mediante la solución de la ecuación de Laplace (2.3a) en coordenadas esferoidales oblatas con apropiadas condiciones de frontera. La solución obtenida para $\mathcal{R}(r, z)$ se usa entonces para obtener la función analítica $\mathcal{F}(\zeta)$, necesaria para hacer la transformación (2.6). El problema de valor en la frontera para un disco delgado se transforma, por consecuencia, en un problema de valor en la frontera para un cascarón en las coordenadas canónicas de Weyl. Así, las soluciones resultantes se pueden interpretar como discos delgados finitos o infinitos con presión radial y campo electromagnético. Discos delgados sin campo electromagnético, obtenidos mediante este mismo procedimiento pueden verse en las referencias [62, 13, 28, 22, 69].

El presente capítulo expone un formalismo suficientemente general mediante el cual se permite interpretar ciertas soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de modelos relativistas de discos delgados. Con el fin de obtener tal interpretación, en primera instancia, se considerarán soluciones axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en las cuales la primera derivada del tensor métrico y la primera derivada del potencial electromagnético presenten una discontinuidad finita a través de un disco delgado. Dada entonces una solución con las propiedades anteriores, se obtendrán el tensor de energía-momentum superficial y la densidad de corriente superficial de la distribución de materia, por medio del formalismo necesario para el tratamiento de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de distribuciones tensoriales.

Las propiedades físicas de la distribución de materia se estudiarán entonces mediante un análisis detallado del tensor de energía-momentum superficial, considerando soluciones suficientemente generales de las ecuaciones de Einstein-Maxwell que describan una distribución superficial de materia no sólo anisótropa, sino que además presente flujo de calor. Posteriormente se presentará una interpretación alternativa de tales discos con base en el CRM, en el cual el tensor de energía-momentum superficial y la densidad superficial de corriente se expresan en términos de la superposición de dos fluidos perfectos contrarrotantes.

2.2. Ecuaciones de Einstein-Maxwell para Cascarones de Materia

Con base en las ideas expuestas se formularán las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell para el caso en que existe un cascarón de materia en el espaciotiempo M, de tal forma que las primeras derivadas del tensor métrico y del potencial electromagnético presentan discontinuidad finita a través de una hipersuperficie Σ. El tensor métrico g_{ab} y el potencial electromagnético A_a se suponen continuos a través de Σ. Las ecuaciones de campo de Einstein-Maxwell, en unidades geometrizadas tales que $c = 8\pi G = \mu_0 = \varepsilon_0 = 1$, están dadas por

$$G_{ab} = T_{ab}, \tag{2.8a}$$
$$F^{ab}{}_{;b} = J^a, \tag{2.8b}$$

con

$$T_{ab} = F_{ac}F_b{}^c - \frac{1}{4}g_{ab}F_{cd}F^{cd}, \tag{2.9a}$$
$$F_{ab} = A_{b,a} - A_{a,b}, \tag{2.9b}$$

donde todos los símbolos tienen el significado usual.

La continuidad en el tensor métrico y en el potencial electromagnético a través de Σ se puede expresar como,

$$[g_{ab}] = g^+_{ab}|_\Sigma - g^-_{ab}|_\Sigma = 0, \tag{2.10a}$$
$$[A_a] = A^+_a|_\Sigma - A^-_a|_\Sigma = 0, \tag{2.10b}$$

mientras que para la discontinuidad en la derivada del tensor métrico se escribe

$$\gamma = [g'_{ab}(\phi)], \tag{2.11}$$

donde $()'$ denota derivada respecto de ϕ. Ahora, usando la aproximación distribucional [68, 58, 87] o por las condiciones de junturas de cascarones delgadaos [40, 41, 70] se tiene

$$g_{ab} = (g_{ab})^D, \tag{2.12a}$$
$$g_{ab,c} = (g_{ab,c})^D, \tag{2.12b}$$
$$\Gamma^a_{bc} = (\Gamma^a_{bc})^D, \tag{2.12c}$$
$$\Gamma^a_{bc,d} = (\Gamma^a_{bc,d})^D + [\Gamma^a_{bc}]\, n_d\, \delta(\phi), \tag{2.12d}$$

donde

$$\Gamma^a_{bc} = \frac{1}{2}g^{ae}(g_{eb,c} + g_{ce,b} - g_{bc,e}), \tag{2.13}$$

son los símbolos de Christoffel y se supone que el tensor métrico, g_{ab}, se puede expresar en términos de una función de distribución según,

$$g_{ab} = (g_{ab})^D \equiv g^+_{ab}\Theta(\phi) + g^-_{ab}\{1 - \Theta(\phi)\}, \tag{2.14}$$

siendo $\Theta(\phi)$ la función de Heaviside y $\delta(\phi)$ la distribución de Dirac con soporte en Σ.

Con el uso de los resultados anteriores en la definición del tensor de curvatura de Riemann,

$$R^a{}_{bcd} \;=\; \Gamma^a_{bd,c} \;-\; \Gamma^a_{bc,d} \;+\; \Gamma^e_{bd}\Gamma^a_{ec} \;-\; \Gamma^e_{bc}\Gamma^a_{ed}, \tag{2.15}$$

y la suposición que el tensor métrico g_{ab} es, por lo menos, de clase C^3 en las regiones $M^{\pm}$, se obtiene para el tensor de Riemann la expresión [57]

$$R^a{}_{bcd} \;=\; (R^a{}_{bcd})^D \;+\; H^a{}_{bcd}\,\delta(\phi), \tag{2.16}$$

donde

$$H^a_{bcd} \;=\; [\Gamma^a_{bd}]\,n_c \;-\; [\Gamma^a_{bc}]\,n_d, \tag{2.17}$$

los $(R^a{}_{bcd})^{\pm}$ son los tensores de Riemann usuales definidos en $M^{\pm}$ y n_a es un vector normal a la hipersuperficie Σ.

Las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico están caracterizadas por el tensor b_{ab}, definido a través de las relaciones

$$[g_{ab,c}] \;=\; b_{ab}\,n_c, \tag{2.18}$$

de tal forma que

$$[\Gamma^a_{bc}] \;=\; \frac{1}{2}\,(b^a_b\,n_c + b^a_c\,n_b - g^{ae}b_{bc}\,n_e), \tag{2.19a}$$

$$H^a{}_{bcd} \;=\; \frac{1}{2}\,(b^a_d n_b n_c - b^a_c n_b n_d + b_{bc}n^a n_d - b_{bd}n^a n_c), \tag{2.19b}$$

donde todas las cantidades se evaluan en la hipersuperficie Σ.

De igual modo, haciendo uso de la continuidad en el potencial electromagnético A_a, se puede escribir

$$A_a \;=\; (A_a)^D, \tag{2.20a}$$

$$A_{a,b} \;=\; (A_{a,b})^D, \tag{2.20b}$$

$$F^{ab} \;=\; (F^{ab})^D, \tag{2.20c}$$

$$F^{ab}{}_{,b} \;=\; (F^{ab}{}_{,b})^D + [F^{ab}]n_b\delta(\phi). \tag{2.20d}$$

Suponiendo que el tensor de energía-momentum T_{ab} y la densidad de corriente $\hat{J}^a$ se pueden expresar en la forma

$$T_{ab} \;=\; (T_{ab})^D \;+\; Q_{ab}\,\delta(\phi), \tag{2.21a}$$

$$\hat{J}^a \;=\; (\hat{J}^a)^D \;+\; \hat{I}^a\,\delta(\phi), \tag{2.21b}$$

donde Q_{ab} y $\hat{I}^a = \sqrt{-g}I^a$ son el tensor de energía-momentum y la densidad de corriente asociados con la hipersuperficie Σ y los $T^{\pm}_{ab}$ y $\hat{J}^a_{\pm}$, con $\hat{J}^a = \sqrt{-g}\,J^a$, son los tensores de energía-momentum y la densidad de corriente usuales definidos en $M^{\pm}$; se puede probar fácilmente, mediante (2.21b), que las ecuaciones de Einstein-Maxwell (2.8) son equivalentes al sistema de ecuaciones

$$G^{\pm}_{ab} \;=\; T^{\pm}_{ab}, \tag{2.22a}$$

$$H_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}H \;=\; Q_{ab}, \tag{2.22b}$$

$$\hat{F}^{ab}_{\pm\;,b} \;=\; \hat{J}^a_{\pm}, \tag{2.22c}$$

$$[\hat{F}^{ab}]n_b \;=\; \hat{I}^a, \tag{2.22d}$$

donde $H_{ab} = H^{c}{}_{acb}$ y $H = g^{ab}_{\Sigma} H_{ab}$.

Cuando el cascarón de materia es la única fuente de los campos gravitacional y electromagnético, de tal forma que el resto del espaciotiempo es vacío (o electrovacío), $J^{a}_{\pm} \equiv 0$ y las ecuaciones (2.22a) y (2.22c) se reducen a las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío

$$G^{\pm}_{ab} = T^{\pm}_{ab}, \tag{2.23a}$$
$$F^{ab}_{\pm\ ;b} = 0. \tag{2.23b}$$

De esta forma, después de resolver el sistema anterior, las ecuaciones (2.22b) y (2.22d) se pueden usar para obtener las expresiones del tensor de energía-momentum y la densidad de corriente para un cascarón de materia,

$$2Q^{a}_{b} = (b^{a}_{c} n_{b} - b^{a}_{b} n_{c}) n^{c} + (b^{c}_{b} n_{c} - b^{c}_{c} n_{b}) n^{a} - \delta^{a}_{b} (b^{e}_{c} n_{e} - b^{e}_{e} n_{c}) n^{c}, \tag{2.24a}$$
$$I^{a} = [F^{ab}] n_{b}, \tag{2.24b}$$

donde todas las cantidades son evaluadas en la hipersuperficie Σ.

2.3. Discos Delgados Axialmente Simétricos

En la sección anterior se presentó el formalismo necesario para interpretar soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en términos de una hipersuperficie Σ (cascarón) que divide el espaciotiempo M en dos regiones. En la presente sección se restringe tal formalismo al caso particular en que la hipersupercie Σ a analizar constituye un disco delgado axialmente simétrico. Para ello se introduce en el espaciotiempo M el elemento de linea de Weyl-Lewis-Papapetrou en coordenadas cuasicilindricas $x^{a} = (t, \varphi, r, z)$,

$$ds^{2} = -\, e^{2\Phi}(dt + \mathcal{W} d\varphi)^{2} \; + \; e^{-2\Phi}[\mathcal{R}^{2} d\varphi^{2} + e^{2\Lambda}(dr^{2} + dz^{2})], \tag{2.25}$$

donde Φ, Λ, $\mathcal{W}$ y $\mathcal{R}$ son funciones de r y z únicamente y se considera la hipersuperficie Σ definida por la función $\phi(x^{a}) = z$, con vector normal $n_{a} = \phi,_{a} = \delta^{z}_{a}$. Dada una solución de la forma (2.25) para las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío el tensor métrico g^{+}_{ab}, definido para $z \geq 0$, se obtiene de la relación

$$ds^{2}|_{M^{+}} = g^{+}_{ab} dx^{a} dx^{b}, \tag{2.26}$$

y el tensor métrico g^{-}_{ab}, definido para $z \leq 0$, se obtiene mediante la relación

$$g^{-}_{ab}(r, z) = g^{+}_{ab}(r, -z), \tag{2.27}$$

de tal forma que $[g_{ab}] = 0$. Esto significa construir modelos con simetría de reflexión con respecto al plano $z = 0$. Las relaciones anteriores implican que, cuando $z \neq 0$,

$$g^{-}_{ab,z}(r, z) = -\, g^{+}_{ab,z}(r, -z), \tag{2.28}$$

así, las discontinuidades en las primeras derivadas del tensor métrico se pueden escribir como

$$b_{ab} = [g_{ab,z}] = 2\, g^{+}_{ab,z}|_{z=0^{+}}. \tag{2.29}$$

Para la métrica (2.25), las componentes no nulas del tensor b_{ab} son

$$
\begin{aligned}
b_{tt} &= -4e^{2\Phi}\Phi, z, && (2.30a)\\
b_{t\varphi} &= -2e^{2\Phi}(\mathcal{W}_{,z} + 2\mathcal{W}\Phi_{,z}), && (2.30b)\\
b_{\varphi\varphi} &= 4e^{-2\Phi}\{\mathcal{R}(\mathcal{R}_{,z} - \mathcal{R}\Phi_{,z}) - \mathcal{W}(\mathcal{W}_{,z} + \mathcal{W}\Phi_{,z})e^{4\Phi}\}, && (2.30c)\\
b_{rr} &= 4e^{2(\Lambda-\Phi)}(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}), && (2.30d)\\
b_{zz} &= 4e^{2(\Lambda-\Phi)}(\Lambda_{,z} - \Phi_{,z}), && (2.30e)
\end{aligned}
$$

donde todas las cantidades se evalúan en la hipersuperficie $z = 0^+$.

Usando los resultados anteriores en la expresión (2.24a), se obtiene para el tensor de energía-momentum del disco las componentes no nulas

$$
\begin{aligned}
Q^0_0 &= \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{\mathcal{R}^2}\left\{2\mathcal{R}^2(\Lambda,_z - 2\Phi,_z) + 2\mathcal{R}\mathcal{R},_z - e^{4\Phi}\mathcal{W}\mathcal{W},_z\right\}, && (2.31a)\\
Q^0_1 &= \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{\mathcal{R}^2}\left\{2\mathcal{R}\mathcal{W}(\mathcal{R},_z - 2\mathcal{R}\Phi,_z) - (\mathcal{R}^2 + \mathcal{W}^2e^{4\Phi})\mathcal{W},_z\right\}, && (2.31b)\\
Q^1_0 &= \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{\mathcal{R}^2}\left(e^{4\Phi}\mathcal{W},_z\right), && (2.31c)\\
Q^1_1 &= \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{\mathcal{R}^2}\left(2\mathcal{R}^2\Lambda,_z + e^{4\Phi}\mathcal{W}\mathcal{W},_z\right), && (2.31d)\\
Q^2_2 &= \frac{e^{2(\Phi-\Lambda)}}{\mathcal{R}^2}\left(2\mathcal{R}\mathcal{R},_z\right), && (2.31e)
\end{aligned}
$$

aquí, como antes, todas las cantidades se evalúan en la hipersuperficie $z = 0^+$.

De otro lado, el “verdadero” tensor de energía-momentum superficial (SEMT) del disco, S_{ab}, y la “verdadera” densidad de corriente superficial, j_a, se pueden obtener a través de las relaciones

$$
\begin{aligned}
S_{ab} &= \int Q_{ab}\,\delta(z)\,ds_n = e^{\Lambda-\Phi}\,Q_{ab}\,, && (2.32a)\\
j_a &= \int I_a\,\delta(z)\,ds_n = e^{\Lambda-\Phi}I_a, && (2.32b)
\end{aligned}
$$

donde $ds_n = \sqrt{g_{zz}}\,dz$ es la medida física de longitud en la dirección normal al disco.

De modo que, las componentes no nulas de S^a_b vienen dadas por

$$
\begin{aligned}
S^0_0 &= \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\left\{2\mathcal{R}^2(\Lambda,_z - 2\Phi,_z) + 2\mathcal{R}\mathcal{R},_z - e^{4\Psi}\mathcal{W}\mathcal{W},_z\right\}, && (2.33a)\\
S^0_1 &= \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\left\{2\mathcal{R}\mathcal{W}(\mathcal{R},_z - 2\mathcal{R}\Phi,_z) - (\mathcal{R}^2 + \mathcal{W}^2e^{4\Phi})\mathcal{W},_z\right\}, && (2.33b)\\
S^1_0 &= \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\left(e^{4\Psi}\mathcal{W},_z\right), && (2.33c)\\
S^1_1 &= \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\left(2\mathcal{R}^2\Lambda,_z + e^{4\Phi}\mathcal{W}\mathcal{W},_z\right), && (2.33d)\\
S^2_2 &= \frac{e^{\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}^2}\left(2\mathcal{R}\mathcal{R},_z\right), && (2.33e)
\end{aligned}
$$

y la densidad de corriente en la superficie del disco mediante

$$j_t = -2e^{\Phi-\Lambda}A_{t,z} \tag{2.34a}$$
$$j_\varphi = -2e^{\Phi-\Lambda}A_{\varphi,z}, \tag{2.34b}$$

donde se ha hecho uso de la simetría de reflexión los potenciales métricos y electromagnéticos con respecto a la superficie del disco, se ha elegido el cuadripotencial electromagnético en la forma $A_a = (A_t, A_\varphi, 0, 0)$ y, como antes, todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$.

2.4. Interpretación Física de los Modelos de Discos Delgados

2.4.1. El Problema de los Valores Propios para el Tensor Energía-Momentum

Ahora, con el fin de analizar las características del SEMT y las densidades de carga y corriente eléctrica, es conveniente expresar éstas en términos de una tétrada ortonormal. Se usará la tétrada del "Observador Localmente Estático" (LSO) [43], u observador en reposo con respecto al infinito, el cual está dado por

$$\mathrm{e}^a_{(0)} = e^{-\Phi}\delta^a_0, \tag{2.35a}$$
$$\mathrm{e}^a_{(1)} = \frac{e^{\Phi}}{\mathcal{R}}\left(\delta^a_1 - \mathcal{W}\delta^a_0\right), \tag{2.35b}$$
$$\mathrm{e}^a_{(2)} = e^{\Phi-\Lambda}\delta^a_2, \tag{2.35c}$$
$$\mathrm{e}^a_{(3)} = e^{\Phi-\Lambda}\delta^a_3, \tag{2.35d}$$

de modo que

$$S^{ab} = S_{(0)(0)}\mathrm{e}^a_{(0)}\mathrm{e}^b_{(0)} + S_{(1)(1)}\mathrm{e}^a_{(1)}\mathrm{e}^b_{(1)} + S_{(2)(2)}\mathrm{e}^a_{(2)}\mathrm{e}^b_{(2)} - S_{(0)(1)}\{\mathrm{e}^a_{(0)}\mathrm{e}^b_{(1)} + \mathrm{e}^a_{(1)}\mathrm{e}^b_{(0)}\}, \tag{2.36}$$

donde

$$S_{(0)(0)} = 2e^{\Phi-\Lambda}\left[2\Phi,_z - \Lambda,_z - \frac{\mathcal{R},_z}{\mathcal{R}}\right], \tag{2.37a}$$
$$S_{(0)(1)} = e^{3\Phi-\Lambda}\left[\frac{\mathcal{W},_z}{\mathcal{R}}\right], \tag{2.37b}$$
$$S_{(1)(1)} = 2e^{\Phi-\Lambda}\Lambda,_z\,, \tag{2.37c}$$
$$S_{(2)(2)} = 2e^{\Phi-\Lambda}\left[\frac{\mathcal{R},_z}{\mathcal{R}}\right], \tag{2.37d}$$

son las componente no nulas del SEMT con respecto al LSO y, de igual manera,

$$j_{(0)} = -2e^{-\Lambda}A_{t,z}, \tag{2.38a}$$
$$j_{(1)} = 2\frac{e^{2\Phi-\Lambda}}{\mathcal{R}}\left\{\mathcal{W}A_{t,z} - A_{\varphi,z}\right\}, \tag{2.38b}$$

son las densidades de carga eléctrica y corriente eléctrica azimutal del disco medidas por este observador.

El caso más simple ocurre si $S_{(0)(1)} = 0$ tal que el SEMT es diagonal. Este caso corresponde a una solución estática, $\mathcal{W} = 0$, en consecuencia se tienen discos delgados estáticos con campo electromagnético. También se puede tener $S_{(0)(1)} = 0$ para soluciones estacionarias con $(\mathcal{W}_{,z})|_{0^+} = 0$ y entonces esta clase de soluciones se puede considerar como una representación de "discos localmente estáticos". En ambos casos se tiene el SEMT de un fluido general,

$$S_{ab} = \epsilon V_a V_b + p_1 X_a X_b + p_2 Y_a Y_b, \tag{2.39}$$

con densidad de energía $\epsilon = S_{(0)(0)}$ y esfuerzos principales $p_1 = S_{(1)(1)}$ y $p_2 = S_{(2)(2)}$, medidos por el LSO. La velocidad del fluido viene dada por $V^a = \mathrm{e}^a_{(0)}$ y las direcciones principales son $X^a = \mathrm{e}^a_{(1)}$ y $Y^a = \mathrm{e}^a_{(2)}$.

De otra parte, cuando $S_{(0)(1)} \neq 0$ el contenido físico de SEMT se puede analizar escribiendo éste en la forma canónica. Para tal fin se resuelve el problema de valores propios para el SEMT y se expresan las cantidades físicas que le caracterizan en términos de valores y vectores propios.

A continuación se soluciona el problema de valores propios para el SEMT S_{ab}, para el caso en que $S_{(0)(1)} \neq 0$. Expresando el problema de valores propios en la tétrada ortonormal del LSO,

$$S_{(m)(n)}\, \xi^{(n)} = \lambda\, \eta_{(m)(n)}\, \xi^{(n)}, \tag{2.40}$$

se pueden obtener fácilmente las soluciones $\lambda_\pm = (B \pm \sqrt{D})/2$, $\lambda_2 = S_{(2)(2)}$ y $\lambda_3 = 0$, donde

$$\begin{aligned} A &= S_{(1)(1)} + S_{(0)(0)}, && (2.41a)\\ B &= S_{(1)(1)} - S_{(0)(0)}, && (2.41b)\\ C &= S_{(0)(1)}, && (2.41c)\\ D &= A^2 - 4C^2. && (2.41d) \end{aligned}$$

Los correspondientes vectores propios están dados por

$$\begin{aligned} \xi^a_\pm &= N_\pm \left\{ \mathrm{e}^a_{(0)} - \left(\frac{A \pm \sqrt{D}}{2C} \right) \mathrm{e}^a_{(1)} \right\}, && (2.42a)\\ \xi^a_2 &= Y^a = \mathrm{e}^a_{(2)}, && (2.42b)\\ \xi^a_3 &= Z^a = \mathrm{e}^a_{(3)}, && (2.42c) \end{aligned}$$

donde los $N_\pm$ son factores de normalización apropiados.

Nótese que existen tres diferentes casos dependiendo del valor de D. En el primer caso, cuando $D > 0$, los dos valores propios $\lambda_\pm$ son reales e iguales y los dos vectores propios $\xi_\pm$ son reales y ortogonales, así uno es espacial y el otro temporal. Escogiendo apropiadamente los factores de normalización $N_\pm$, es fácil ver que

$$\xi_\pm \cdot \xi_\pm = \pm\, \nu_A, \tag{2.43}$$

donde $\nu_A = A/|A|$, de modo que ν_A determina el carácter causal de los vectores propios $\xi_\pm$ y se obtiene una tétrada ortonormal con ellos y los otros dos vectores. En el segundo caso, cuando $D < 0$, los dos vectores propios $\xi_\pm$ son complejos conjugados y ortogonales. Se pueden escoger, apropiadamente, los factores de normalización $N_\pm$ de tal manera que

$$\xi_+ \cdot \xi_+ = \xi_- \cdot \xi_- < 0, \tag{2.44}$$

y entonces los vectores propios se pueden escribir como

$$\xi^a_\pm = \xi^a_R + i\,\xi^a_I, \tag{2.45}$$

con

$$\xi_R \cdot \xi_R < 0, \tag{2.46a}$$
$$\xi_I \cdot \xi_I > 0, \tag{2.46b}$$
$$\xi_R \cdot \xi_I = 0. \tag{2.46c}$$

Normalizando las partes real e imaginaria de los vectores propios, se tiene nuevamente una tétrada ortonormal formada con ξ_R, ξ_I y los otros dos vectores propios. Finalmente, $D = 0$, $\lambda_+ = \lambda_-$ y los dos vectores propios $\xi_\pm$ son colineales y nulos, $\xi_\pm \cdot \xi_\pm = 0$. Estos vectores nulos se pueden expresar apropiadamente en términos de un vector temporal y uno espacial y se tiene nuevamente una tétrada ortonormal. Además, se puede probar fácilmente que todas las cantidades que caracterizan el tensor energía-momentum son funciones continuas de D. De acuerdo con ello, se puede considerar el caso $D = 0$ como el límite de los casos anteriores cuando $D \to 0$.

En resumidas cuentas, en los tres casos se obtiene una tétrada ortonormal asociada con los vectores propios. Esta tétrada se puede escribir apropiadamente como

$$V^a = \frac{\mathrm{e}^a_{(0)} + v\mathrm{e}^a_{(1)}}{\sqrt{1-v^2}}, \tag{2.47a}$$
$$X^a = -\nu\left[\frac{v\mathrm{e}^a_{(0)} + \mathrm{e}^a_{(1)}}{\sqrt{1-v^2}}\right], \tag{2.47b}$$
$$Y^a = \mathrm{e}^a_{(2)}, \tag{2.47c}$$
$$Z^a = \mathrm{e}^a_{(3)}, \tag{2.47d}$$

donde

$$v = \begin{cases} (\nu_{_A}\sqrt{D} - A)/2C; & D \geq 0, \\ (\nu_{_C}\sqrt{-D} - 2C)/A; & D \leq 0, \end{cases} \tag{2.48}$$

con $\nu_{_C} = C/|C|$, $\nu = 1$ cuando $D > 0$ y $\nu = \nu_{_C}$ cuando $D < 0$.

La tétrada ortonormal $\{V^a, X^a, Y^a, Z^a\}$ es comóvil con el disco, tal que el vector velocidad del disco está dado por el vector propio temporal V^a. De acuerdo con ello, la velocidad "tangencial" o "circular" del disco v, medida por el LSO, está dado por (2.48). Ahora, es fácil ver que en todos los casos se tiene que

$$|v| < 1, \tag{2.49}$$

y que

$$\lim_{D\to 0} |v| = 1. \tag{2.50}$$

Esto es, la velocidad tangencial de los discos es siempre menor que la de la luz y solo alcanza este valor cuando $D = 0$, el caso cuando se tiene un vector propio nulo.

2.4.2. Contenido Físico del Tensor Energía-Momentum

Expresado en términos de la tétrada comóvil $\{V^a, X^a, Y^a, Z^a\}$, el SEMT se puede escribir en la forma canónica

$$S_{ab} = \epsilon V_a V_b + p_1 X_a X_b + p_2 Y_a Y_b + q(V_a X_b + X_a V_b). \tag{2.51}$$

Entonces el SEMT representa un fluido general con flujo de calor diferente de cero. La densidad de energía del disco está dada por

$$\epsilon = \begin{cases} (\nu_A \sqrt{D} - B)/2, & D \geq 0, \\ -B/2, & D \leq 0, \end{cases} \tag{2.52}$$

mientras que

$$p_1 = \begin{cases} (\nu_A \sqrt{D} + B)/2, & D \geq 0, \\ B/2, & D \leq 0, \end{cases} \tag{2.53}$$

es el esfuerzo principal en la dirección de X^a, y

$$p_2 = S_{(2)(2)} \tag{2.54}$$

es el esfuerzo principal en la dirección de Y^a. El vector flujo de energía está dado por $S^a = -S^a_b V^b$. Entonces, usando la expresión (4.4) para el SEMT y la ortonormalidad de la tétrada comóvil, se puede escribir

$$S^a = \epsilon V^a + qX^a, \tag{2.55}$$

de modo que el flujo de energía tiene dos contribuciones: la del "flujo de energía cinética"

$$\varepsilon^a = \epsilon V^a, \tag{2.56}$$

y la del vector flujo de calor,

$$q^a = qX^a, \tag{2.57}$$

donde

$$q = \begin{cases} 0, & D \geq 0, \\ \sqrt{-D}/2, & D \leq 0, \end{cases} \tag{2.58}$$

es la función de calor.

La condición débil de energía requiere que la densidad de energía sea no negativa,

$$\epsilon \geq 0, \tag{2.59}$$

mientras que la condición de energía fuerte es equivalente a la condición

$$\rho \geq 0, \tag{2.60}$$

donde

$$\rho = \epsilon + p_1 + p_2 \tag{2.61}$$

es la "densidad newtoniana efectiva". Finalmente, la condición dominante de energía requiere que el vector flujo de energía sea temporal o nulo,

$$S^a S_a \leq 0. \tag{2.62}$$

El SEMT (4.4) satisfará las condiciones anteriores cuando

$$|q| \leq |\epsilon|, \tag{2.63}$$

garantizándose así la propagación causal de la energía.

2.5. El Modelo de Contrarrotación

Ahora se considerará, con base en las referencias [20], [54] y [16], la posibilidad de que el SEMT S^{ab} y la densidad de corriente j^a se puedan expresar como la superposición de dos fluidos cargados contrarrotantes que circulan en direcciones opuestas. Así, se supone que S^{ab} y j^a se pueden escribir como

$$S^{ab} = S^{ab}_+ + S^{ab}_-, \tag{2.64a}$$

$$j^a = j^a_+ + j^a_-, \tag{2.64b}$$

con el SEMT y la densidad superficial de corriente de los fluidos contrarrotantes prógrados y retrógrados dados, respectivamente, por

$$S^{ab}_+ = (\epsilon_+ + p_+)\, U^a_+ U^b_+ + p_+\, h^{ab}, \tag{2.65a}$$

$$S^{ab}_- = (\epsilon_- + p_-)\, U^a_- U^b_- + p_-\, h^{ab}, \tag{2.65b}$$

j^a_+ y j^a_-, donde

$$h^{ab} = g^{ab} - \mathrm{e}^a_{(3)} \mathrm{e}^b_{(3)}, \tag{2.66}$$

es la métrica inducida sobre la hipersuperficie $z = 0$.

Con el fin de descomponer (2.64a), inicialmente se escribe el SEMT como

$$S^{ab} = \{S_{(0)(0)} + S_{(2)(2)}\}\, \mathrm{e}^a_{(0)} \mathrm{e}^b_{(0)} + \{S_{(1)(1)} - S_{(2)(2)}\}\, \mathrm{e}^a_{(1)} \mathrm{e}^b_{(1)} - S_{(0)(1)} \{\mathrm{e}^a_{(0)} \mathrm{e}^b_{(1)} + \mathrm{e}^a_{(1)} \mathrm{e}^b_{(0)}\} + S_{(2)(2)} h^{ab}. \tag{2.67}$$

Ahora, si $U^a_\pm = (U^0_\pm, U^1_\pm, 0, 0)$ son respectivamente los vectores velocidad de los dos fluidos contrarrotantes, su proyección sobre la tétrada del LSO da

$$U^a_+ = \frac{\mathrm{e}^a_{(0)} + u_+ \mathrm{e}^a_{(1)}}{\sqrt{1 - u_+^2}}, \tag{2.68a}$$

$$U^a_- = \frac{\mathrm{e}^a_{(0)} + u_- \mathrm{e}^a_{(1)}}{\sqrt{1 - u_-^2}}, \tag{2.68b}$$

donde $u_\pm = U^{(1)}_\pm / U^{(0)}_\pm$ son las velocidades tangenciales de los fluidos contrarrotantes con respecto a la tétrada LSO.

Ahora, expresando los vectores de la tétrada $\mathrm{e}^a_{(0)}$ y $\mathrm{e}^a_{(1)}$ en términos de los vectores velocidad U^a_+ y U^a_- mediante el uso de (2.68a) and (2.68b), se obtiene

$$\begin{aligned} S^{ab} = {} & \frac{f(u_-, u_-)(1 - u_+^2)}{(u_+ - u_-)^2}\, U^a_+ U^b_+ + \frac{f(u_+, u_+)(1 - u_-^2)}{(u_+ - u_-)^2}\, U^a_- U^b_- \\ & - \frac{f(u_+, u_-)[(1 - u_+^2)(1 - u_-^2)]^{\frac{1}{2}}}{(u_+ - u_-)^2} \left\{ U^a_+ U^b_- + U^a_- U^b_+ \right\} + S_{(2)(2)} h^{ab}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

donde

$$f(u_1, u_2) = \{S_{(0)(0)} + S_{(2)(2)}\} u_1 u_2 + S_{(0)(1)} \{u_1 + u_2\} + \{S_{(1)(1)} - S_{(2)(2)}\}. \tag{2.70}$$

entonces, con el fin de escribir el SEMT en la forma (2.64a), los términos mixtos tienen que anularse y las velocidades tangenciales de contrarrotación estarán relacionadas por

$$f(u_+, u_-) = 0, \tag{2.71}$$

donde se asume que $u_\pm \neq 1$. Así, el SEMT se puede escribir como la superposición de dos fluidos cargados si, y solo si, la ecuación anterior admite una solución tal que $u_+ \neq u_-$. Este último resultado generaliza la obtenida en [22] y es completamente equivalente a la condición necesaria y suficiente obtenida en [16]. Sin embargo, la relación anterior no determina $u_\pm$ únicamente y por consecuencia existe cierta libertad en la escogencia de los vectores $U^a_\pm$.

De otra parte, asumiendo un escogencia dada para las velocidades de contrarrotación en acuerdo con la ligadura (2.71), se puede escribir el SEMT y la densidad de carga eléctrica de los fluidos como (2.64a) con

$$\epsilon_+ + p_+ = \left[\frac{1-u_+^2}{u_- - u_+}\right]\left[\{S_{(0)(0)} + S_{(2)(2)}\}u_- + S_{(0)(1)}\right], \tag{2.72a}$$

$$\epsilon_- + p_- = \left[\frac{1-u_-^2}{u_+ - u_-}\right]\left[\{S_{(0)(0)} + S_{(2)(2)}\}u_+ + S_{(0)(1)}\right], \tag{2.72b}$$

$$p_+ + p_- = S_{(2)(2)}, \tag{2.72c}$$

$$\sigma_\pm = \frac{\sqrt{1-u_\pm^2}}{u_\pm - u_\mp}(j^{(1)} - j^{(0)}u_\mp) \tag{2.72d}$$

y, con las expresiones anteriores, adicionalmente se obtiene la relación

$$\epsilon_+ + \epsilon_- = S_{(0)(0)} - S_{(1)(1)} + S_{(2)(2)}. \tag{2.73}$$

Estas expresiones son la generalización estacionaria de la obtenida en [22] para el caso estático y también son equivalentes a las expresiones en [16]. Nótese que la densidad de energía, $\epsilon_\pm$, y la presión, $p_\pm$, no están únicamente definidas por las relaciones anteriores, tampoco para valores definidos de $u_\pm$. Acordemente, se necesita imponer alguna condición adicional sobre la densidad de energía y presión con el fin de determinar completamente el CRM.

2.5.1. Determinación de las Velocidades de Contrarrotación

Tal como se anotó en la sección anterior, es necesario suponer alguna relación adicional entre las velocidades de contrarrotación con el fin de determinar completamente el CRM. La más simple, y comúnmente considerada, posibilidad es tomar las dos velocidades tangenciales de contrarrotación como iguales y opuestas; esto es,

$$u_+ = -u_- = u, \tag{2.74}$$

donde u es obtenida a partir de (2.71) y viene dada por

$$u^2 = \frac{S_{(1)(1)} - S_{(2)(2)}}{S_{(0)(0)} + S_{(2)(2)}} = \frac{\mathcal{R}\Lambda_{,z} - \mathcal{R}_{,z}}{\mathcal{R}(2\Phi_{,z} - \Lambda_{,z})}. \tag{2.75}$$

Ahora, con el fin de que las expresiones anteriores tengan sentido, se necesita imponer la condición adicional

$$0 < u^2 < 1, \tag{2.76}$$

ya que, si esta última condición no es satisfecha, no se puede obtener un CRM bien definido. Sin embargo, puede pasar que la solución considerada satisfaga las condiciones anteriores sólo en una

región parcial del disco y, si este es el caso, la correspondiente interpretación del CRM es válida sólo parcialmente.

Otra posibilidad comúnmente aceptada es suponer que los dos fluidos se mueven a lo largo de electrogeodésicas. Con el fin de analizar esta posibilidad, se escriben los vectores velocidad como $U^a_\pm = U^0_\pm(1, \Omega_\pm, 0, 0)$, de tal modo que la ecuación de la electrogeodésica es (para ver detalles de la obtención de esta ecuación ver Apéndice A)

$$\frac{1}{2}(U_\pm^0)^2(g_{00,r} + 2g_{01,r}\Omega_\pm + g_{11,r}\Omega_\pm^2)(\epsilon_\pm + p_\pm) - p_{\pm,r} = -\sigma_\pm U^0_\pm \left(A_{t,r} + A_{\varphi,r}\Omega_\pm\right), \tag{2.77}$$

donde, como se sabe, $\Omega_\pm = U^\varphi_\pm / U^t_\pm$ son las velocidades angulares de los fluidos contrarrotantes.

En conclusión, las velocidades tangenciales de contrarrotación pueden ser determinadas explícitamente si y sólo si se asume una condición adicional entre ellas, como por ejemplo que estas sean iguales y opuestas o la condición de movimiento de los fluidos a lo largo de electrogeodésicas. Ahora, puede pasar que las soluciones obtenidas no satisfagan ninguna de estas condiciones. Esto es, las velocidades de contrarrotación, en general, no son determinadas completamente mediante las ligaduras (2.71). Entonces, el CRM es en general indeterminado dado que las densidades de energía y las presiones no pueden ser escritas explícitamente sin un conocimiento previo de las velocidades tangenciales de contrrrotación. En efecto, como se muestra en [16] y [37], se puede interpretar el SEMT en términos de una familia 2-paramétrica de fluidos perfectos.

2.5.2. Determinación de las Presiones y Densidades de Energía de Contrarrotación

Supóngase ahora que las velocidades tangenciales de contrarrotación se conocen a través de una de las dos vías (o mediante otro camino) descritas en la sección anterior, se obtendrán entonces las expresiones para las densidades de energía y las presiones de los dos fluidos contrarrotantes. Como ya se dijo, el sistema (2.72a) – (2.72c) es, en general, indeterminado. Así que no es posible obtener las densidades y presiones sin una condición adicional. No obstante, si $S_{(2)(2)} = 0$, se puede obtener una solución del sistema (2.72a) – (2.72c) bajo la condición que los "esfuerzos" de contrarrotación sean positivas (presiones). Así, se tiene que las presiones son

$$p_+ = p_- = 0, \tag{2.78}$$

de tal modo que el SEMT (2.36) puede interpretarse como el correspondiente a dos fluidos de polvo contrarrotantes.

Con los resultados anteriores, las expresiones (2.72a) y (2.72b) se reducen a

$$\epsilon_+ = \frac{S_{(0)(0)}u_- + S_{(0)(1)}}{(u_- - u_+)(1 - u_+^2)^{-1}}, \tag{2.79a}$$

$$\epsilon_- = \frac{S_{(0)(0)}u_+ + S_{(0)(1)}}{(u_+ - u_-)(1 - u_-^2)^{-1}}, \tag{2.79b}$$

y entonces todas las cantidades que caracterizan el CRM están completamente determinadas. Como se puede ver, las densidades de energía de los dos fluidos de polvo contrarrotantes son diferentes,

también cuando se tiene iguales y opuestas velocidades tangenciales. Sin embargo, si $S_{(0)(1)} = 0$ y las velocidades tangenciales son iguales y opuestas, las densidades de los dos fluidos de polvo son iguales y opuestas.

De otro lado, cuando $S_{(2)(2)} \neq 0$, se tiene que imponer una condición adicional con el fin de obtener explícitamente las expresiones para las densidades y presiones. Una posible, y común condición es suponer que las densidades de energía de los dos fluidos contrarrotantes son iguales. Así, la ecuación (2.73) conduce a

$$\epsilon_+ = \epsilon_- = \frac{1}{2}\{S_{(0)(0)} - S_{(1)(1)} + S_{(2)(2)}\}, \tag{2.80}$$

mientras que las ecuaciones (2.72a) – (2.72b) conducen a

$$p_+ = \left\{S_{(2)(2)} - [S_{(0)(0)} + S_{(1)(1)}]\,[(u_+ + u_-)/(u_+ - u_-)]\right\}/2 - S_{(0)(1)}\,[(1 + u_+u_-)/(u_+ - u_-)]\,, \tag{2.81a}$$

$$p_- = \left\{S_{(2)(2)} + [S_{(0)(0)} + S_{(1)(1)}]\,[(u_+ + u_-)/(u_+ - u_-)]\right\}/2 + S_{(0)(1)}\,[(1 + u_+u_-)/(u_+ - u_-)]\,. \tag{2.81b}$$

Así, las presiones de los dos fluidos contrarrotantes son diferentes, también cuando las velocidades tangenciales son iguales y opuestas. Las presiones son iguales sólo si $S_{(0)(1)} = 0$ y las velocidades tangenciales son iguales y opuestas.

Ahora, en lugar de suponer que las dos densidades son iguales, se puede suponer que las presiones son iguales, así que la ecuación (2.72c) conduce a

$$p_+ = p_- = S_{(2)(2)}/\,2, \tag{2.82}$$

y las ecuaciones (2.72a) – (2.72b) conducen a

$$\epsilon_+ = \left[S_{(2)(2)}/\,2\right] - \left[(S_{(0)(0)}u_- + S_{(1)(1)}u_+)/(u_+ - u_-)\right] - S_{(0)(1)}\,[(1 + u_+u_-)/(u_+ - u_-)]\,, \tag{2.83a}$$

$$\epsilon_- = \left[S_{(2)(2)}/\,2\right] + \left[(S_{(0)(0)}u_- + S_{(1)(1)}u_+)/(u_+ - u_-)\right] + S_{(0)(1)}\,[(1 + u_+u_-)/(u_+ - u_-)]\,. \tag{2.83b}$$

Así, se tiene entonces dos fluidos contrarrotantes con diferentes densidades de energía, también cuando las velocidades son iguales y opuestas y, como en los previos casos, las densidades de energía son iguales sólo si $S_{(0)(1)} = 0$ y las velocidades tangenciales son iguales y opuestas.

Capítulo 3

Discos Finitos de Polvo, Eléctricamente Cargados, en Espaciotiempos Conformestáticos Axialmente Simétricos

---

Índice

3.1. Introducción

A continuación se presenta una familia infinita de discos de polvo cargados eléctricamente. Estos discos, axialmente simétricos de extensión finita, se obtienen solucionando las ecuaciones de Einstein-Maxwell para espaciotiempos conformestáticos, los cuales se caracterizan por sólo una función métrica. Con el fin de obtener las soluciones, se establece una relación funcional entre la función métrica y el potencial eléctrico. También se supone que la función métrica depende de otra función auxilar, la cual se toma como una solución de la ecuación de Laplace [33]. Las soluciones para la función auxiliar elegidas corresponden a las dadas por la familia de discos generalizados de Kalnajs obtenidas por González y Reina [30], expresadas en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales corresponden a una familia de discos newtonianos delgados axialmente simétricos de radio finito. Los discos relativistas delgados obtenidos tienen densidad de carga que es igual, excepto por un signo, a su densidad de masa. De modo que la densidad de energía de los discos es siempre positiva y bien comportadas, anulándose en el borde del disco. Acordemente, como los discos obtenidos están conformados por polvo, su tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. El presente capítulo corresponde a la versión en lengua española del trabajo [27].

3.2. Ecuaciones de Einstein-Maxwell y Soluciones tipo Discos Delgados Finitos Conformestáticos

Como es sabido, para la descripción de un espaciotiempo estacionario axialmente simétrico puede tomarse el elemento de linea de Weyl-Lewis-Papapetrou en coordenadas canónicas de Weyl dado por

(2.5). Ahora bien, si se hace la transformación

$$\mathcal{R} \to r, \tag{3.1a}$$

$$\mathcal{Z} \to z, \tag{3.1b}$$

y en (2.5) se escoge $\Pi = 0$, para la función métrica Π, mientras que para la otra función métrica Ψ se toma $\Psi = \lambda$, donde λ es función sólo de r y z, se tiene el tensor metrico correspondiente a un espaciotiempo comformestacionario axialmente simétrico. En el caso particular en que $\mathcal{A} = 0$ se obtiene entonces el elemento de linea

$$ds^2 = -\,e^{2\lambda}dt^2 + e^{-2\lambda}(r^2d\varphi^2 + dr^2 + dz^2), \tag{3.2}$$

el cual corresponde a un espaciotiempo conformestático axialmente simetríco. Este tipo de métricas pueden interpretarse geométricamente como métricas en las cuales la parte espacial es conformalmente plana o, dicho en otros términos, que su parte espacial es obtenida a partir de una transformación conforme de la parte espacial de la métrica minkowskiana. Como se verá más adelante, este tipo de métricas corresponden al exterior de configuraciones constituidas por polvos estáticos eléctricamente cargados en los cuales la fuerza eléctrica y la gravitacional se encuentran en perfecto balance [86].

Ahora bien, para la métrica 3,2 el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío en unidades geometrizadas tal que $c = G = \mu_0 = \epsilon_0 = 1$ es equivalente a

$$\nabla^2\lambda = e^{-2\lambda}\nabla\phi\cdot\nabla\phi, \tag{3.3}$$

$$\nabla^2\phi = 2\,\nabla\lambda\cdot\nabla\phi, \tag{3.4}$$

$$\lambda_{,i}\lambda_{,j} = e^{-2\lambda}\phi_{,i}\,\phi_{,j}, \tag{3.5}$$

donde los índices $i, j = 1, 2, 3$ y ∇ es el operador diferencial usual en coordenadas cilíndricas y se ha escogido el potencial electromagnético en la forma

$$A_a = (A_t = -\phi, 0, 0, 0), \tag{3.6}$$

y se ha supuesto que tanto la función métrica como el potencial eléctrico son independientes de t.

Con el propósito de solucionar el sistema de ecuaciones anterior, primero se esupone que el potencial eléctrico ϕ es funcionalmente dependiente de la función métrica λ, $\phi = \phi(\lambda)$, tal que la ecuación (3.5) implica que

$$[\phi'(\lambda)]^2 = e^{2\lambda}, \tag{3.7}$$

cuya solución está dada por

$$\phi = \pm e^{\lambda} + k_1, \tag{3.8}$$

con k_1 una constante de integración arbitraria. Bajo esta solución, el sistema de ecuaciones (3.3)-(3.4) se reduce únicamente a la ecuación diferencial parcial no lineal,

$$\nabla^2\lambda = \nabla\lambda\cdot\nabla\lambda, \tag{3.9}$$

para la función métrica λ. Si ahora se asume una dependencia funcional para la función métrica $\lambda(U)$, donde U es una función auxiliar elegida como una solución de la ecuación de Laplace, la ecuación (3.9) se reduce a

$$\lambda''(U) = [\lambda'(U)]^2 , \tag{3.10}$$

cuya solución viene dada por

$$e^{\lambda} = \frac{k_3}{U + k_2}, \tag{3.11}$$

donde k_2 y k_3 son constantes de integración.

Como es natural, si se espera un comportamiento físicamente apropiado en el infinito, se imponen algunas condiciones en las soluciones. Así, con el fin de obtener un espaciotiempo asintóticamente plano, se exige que $e^{\lambda} = 1$ en el infinito. También es necesario que $\phi = 0$ en el infinito, dado que se pretende obtener fuentes de extensión finita. Consecuentemente, se considerarán para la función U sólo aquellas soluciones de la ecuación de Laplace que exhiban el comportamiento $U = 0$ en el infinito. De esta manera, tomando $k_2 = k_3$ se obtiene el comprtamiento deseado para λ. Finalmente, para completar las exigencias impuestas sobre el comportamiento de ϕ, se toma $k_1 = \mp 1$, así que la ecuación (3.8) puede ser escrita como

$$\phi = \pm \left[\frac{k}{U + k} - 1 \right], \tag{3.12}$$

donde las constantes han sido renombradas como $k_2 = k_3 = k$.

Como se puede ver de (3.11) y (3.12), las soluciones del sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell (3.3)-(3.4) son expresadas en términos U, una solución de la ecuación de la ecuación de Laplace. De manera que, con el objetivo de tener soluciones correspondientes a discos delgados finitos a se considerarán sólamente soluciones de la ecuación de Laplace que describan propiamente fuentes discoidales Newtonianas de radio finito. Esta clase de soluciones se pueden obtener introduciendo las coordenadas esferoidales oblatas, las cuales se adaptan en forma natural a la fuente debido a la geometría de estas fuentes. Estas coordenadas están relacionadas con las coordenadas cilíndricas a través de las expresiones [64]

$$r^2 = a^2(1 + \xi^2)(1 - \eta^2), \tag{3.13a}$$

$$z = a\xi\eta, \tag{3.13b}$$

donde $0 \leq \xi < \infty$ y $-1 \leq \eta < 1$. El disco tiene coordenadas $\xi = 0$, $0 \leq \eta^2 < 1$ y, a través del disco, η cambia de signo pero no cambia su valor absoluto.

El comportamiento singular de la coordenada η implica que un polinomio de η con potencia par siempre es continuo en cualquier parte pero presenta una discontinuidad en las derivadas con respecto de η en el disco. Acordemente, la solución general de la ecuación de Laplace correspondiente a una fuente tipo disco delgada axialmente simétrica de radio finito a puede expresarse como [2]

$$U(\xi, \eta) = -\sum_{n=0}^{\infty} C_{2n} q_{2n}(\xi) P_{2n}(\eta), \tag{3.14}$$

donde los $P_{2n}(\eta)$ son los polinomios de Legendre de orden $2n$ y $q_{2n}(\xi) = i^{2n+1} Q_{2n}(i\xi)$, con $Q_{2n}(i\xi)$ las funciones de Legendre de segunda clase con argumento imaginario. Los C_{2n} son constantes que

habrán de ajustarse apropiadamente de acuerdo a la solución en particular y están directamente relacionadas con la densidad de masa Newtoniana de la fuente considerada. En la próxima sección se presenta una escogencia particular de estas constantes correspondientes a una familia infinita de discos con una densidad superficial de masa bien comportada, la familia de discos generalizados de Kalnaj recientemente presentados por González y Reina [30].

Ahora bien, para la métrica (3.2), la única componente diferente de cero Q^a_b es

$$Q^0_0 = -\frac{e^{2\lambda}\lambda_{,z}}{2\pi}, \tag{3.15}$$

por lo tanto, la única componente diferente de cero del tensor energía-momentum superficial $S^{\,a}_{\,b}$ está dado por

$$S^{\,0}_{\,0} = -\frac{e^{\lambda}\lambda_{,z}}{2\pi}, \tag{3.16}$$

donde todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$.

El tensor energía-momentum superficial del disco y la densidad superficial de corriente pueden escribirse como

$$S^{ab} = \epsilon V^a V^b, \tag{3.17a}$$

$$j^a = \sigma V^a \tag{3.17b}$$

donde

$$V^a = e^{-\lambda}(1, 0, 0, 0) \tag{3.18}$$

es el vector velocidad de la distribución de materia. Como consecuencia de lo anterior, la densidad de energía y la densidad de carga eléctrica de la distribución de materia están dadas por

$$\epsilon = \frac{e^{\lambda}\lambda_{,z}}{2\pi}, \tag{3.19}$$

$$\sigma = -\frac{\phi_{,z}}{2\pi}, \tag{3.20}$$

respectivamente. Ahora, mediante el uso de (3.8), la expresión (3.20) puede ser escrita como

$$\sigma = \mp\epsilon, \tag{3.21}$$

tal que la densidad de carga eléctrica de los discos es igual, excepto por un signo, a su densidad de masa. Por consecuencia, las fuerzas eléctrica y gravitacional están en perfecto balance, como en las configuraciones de ECD; tal como se mencionó en la introducción al capítulo.

Ahora, en el contexto de la relatividad general es necesario que el tensor energía-momentum satisfaga ciertos condiciones enmarcadas en las *condiciones de energía débil, fuerte y dominante* [39]. En efecto, para el caso de discos de polvo, todas estas condiciones se reducen a la condición que la densidad de energía es mayor o igual que cero, $\epsilon \geq 0$. De otra parte, de la ecuación (3.11), se tiene que la densidad de energía puede ser escrita como

$$\epsilon = -\frac{k\Sigma}{(U + k)^2}, \tag{3.22}$$

donde

$$\Sigma = \frac{U_{,z}}{2\pi} \tag{3.23}$$

es la densidad de masa Newtoniana de una fuente discoidal con potencial gravitacional dada por U. Acordemente, si la densidad de masa Newtoniana Σ es no negativa en todas partes, la correspondiente densidad de energía relativista ϵ será también no negativa en cualquier parte sólo si $k < 0$. Así entonces, como se quiere que el tensor enrgía-momentum esté de acuerdo con as condiciones de energía, las constantes C_{2n} en C_{2n} deben de escogerse apropiadamente de tal modo que $\Sigma \geq 0$. Además, si se tiene un potencial newtoniano U negativo en cualquier parte, tal como se espera para fuentes Newtonianas compactas, entonces la densidad de enegía ϵ será no singular en el disco.

3.3. Una Familia Particular de Discos

Ahora se restringirá el modelo general estudiado en la sección anterior considerando una familia particular de discos con densidad superficial de energía bien comportada. Los miembros de la familia de discos se expresan en términos de soluciones particulares de la ecuación de Laplace U_m obtenidas escogiendo apropiadamente las constantes de la solución general (3.14). La solución particular representa el potencial gravitacional de un disco delgado finito con densidad de masa dada por

$$\Sigma_m(r) = \frac{(2m+1)M}{2\pi a^2}\left[1 - \frac{r^2}{a^2}\right]^{m-\frac{1}{2}}, \tag{3.24}$$

donde M y a son, respectivamente, la masa total y el radio del disco y se tiene que $m \geq 1$. Para cada valor de m, las constantes C_{2n} están definidas a través de la relación [30]

$$C_{2n} = \frac{K_{2n}}{(2n+1)q_{2n+1}(0)}, \tag{3.25}$$

donde

$$K_{2n} = \frac{M}{2a}\left[\frac{\pi^{1/2}\,(4n+1)\,(2m+1)!}{2^{2m}(m-n)!\Gamma(m+n+\frac{3}{2})}\right] \tag{3.26}$$

para $n \leq m$, y $C_{2n} = 0$ para $n > m$. En la tabla 3.1 se listan los valores diferentes de cero para los primeros seis miembros de la familia. Así, usando estas constantes en la solución general (3.14), se puede ver que el potencial gravitacional U_m será no negativo siempre, tal como se impuso en las secciones previas.

Con los valores anteriores para las contantes C_{2n}, se puede calcular fácilmente la densidad de energía de los discos usando la ecuación (3.22). Ahora, con el fin de ilustrar gráficamente el comportamiento de los diferentes modelos particulares, primero se introducen cantidades adimensionales a través de las relaciones

$$\tilde{U}_m(\tilde{r}) = \frac{aU_m(\tilde{r})}{M}, \tag{3.27}$$

$$\tilde{\Sigma}_m(\tilde{r}) = \frac{\pi a^2 \Sigma_m(\tilde{r})}{M}, \tag{3.28}$$

$$\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r}) = \pi a \epsilon_m(\tilde{r}), \tag{3.29}$$

Cuadro 3.1: Las constantes C_{2n} para $m = 0, ..., 6$.

m	C_0	C_2	C_4	C_6	C_8	C_{10}	C_{12}
1	$\frac{M}{a}$	$\frac{M}{a}$					
2	$\frac{M}{a}$	$\frac{10M}{7a}$	$\frac{3M}{7a}$				
3	$\frac{M}{a}$	$\frac{5M}{3a}$	$\frac{9M}{11a}$	$\frac{5M}{33a}$			
4	$\frac{M}{a}$	$\frac{20M}{11a}$	$\frac{162M}{143a}$	$\frac{4M}{11a}$	$\frac{7M}{143a}$		
5	$\frac{M}{a}$	$\frac{25M}{13a}$	$\frac{18M}{13a}$	$\frac{10M}{17a}$	$\frac{35M}{247a}$	$\frac{63M}{4199a}$	
6	$\frac{M}{a}$	$\frac{2M}{a}$	$\frac{27M}{17a}$	$\frac{260M}{323a}$	$\frac{5M}{19a}$	$\frac{378M}{7429a}$	$\frac{33M}{7429a}$

donde $\tilde{r} = r/a$, $0 \leq \tilde{r} \leq 1$, y $U_m(\tilde{r})$ es evaluada en $z = 0^+$.

Consecuentemente, las densidades adimensionales de energía $\tilde{\epsilon}(\tilde{r})$ pueden escribirse como

$$\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r}) = -\frac{\tilde{k}\tilde{\Sigma}_m(\tilde{r})}{[\tilde{U}_m(\tilde{r}) + \tilde{k}]^2}, \tag{3.30}$$

con $\tilde{k} = (ka)/M$.

Así, usando las anteriores expresiones y los valores de las constantes C_{2n} dados en la tabla 3.1, se obtienen las siguientes expresiones

$$\tilde{\epsilon}_1 = -\frac{3\tilde{k}\sqrt{1-\tilde{r}^2}}{2[\tilde{k} + \frac{3\pi}{8}(\tilde{r}^2 - 2)]^2}, \tag{3.31}$$

$$\tilde{\epsilon}_2 = -\frac{5\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{3/2}}{2[\tilde{k} - \frac{15\pi}{128}(3\tilde{r}^4 - 8\tilde{r}^2 + 8)]^2}, \tag{3.32}$$

$$\tilde{\epsilon}_3 = -\frac{7\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{5/2}}{2[\tilde{k} + \frac{35\pi}{512}(5\tilde{r}^6 - 18\tilde{r}^4 + 24\tilde{r}^2 - 16)]^2}, \tag{3.33}$$

$$\tilde{\epsilon}_4 = -\frac{9\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{7/2}}{2[\tilde{k} - \frac{315\pi}{32768}(35\tilde{r}^8 - 160\tilde{r}^6 + 288\tilde{r}^4 - 256\tilde{r}^2 + 128)]^2}, \tag{3.34}$$

$$\tilde{\epsilon}_5 = -\frac{11\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{9/2}}{2[\tilde{k} + \frac{693\pi}{131072}(63\tilde{r}^{10} - 350\tilde{r}^8 + 800\tilde{r}^6 - 960\tilde{r}^4 + 640\tilde{r}^2 - 256)]^2}, \tag{3.35}$$

$$\tilde{\epsilon}_6 = -\frac{13\tilde{k}(1-\tilde{r}^2)^{11/2}}{2[\tilde{k} - \frac{3003\pi}{2097152}(231\tilde{r}^{12} - 1512\tilde{r}^{10} + 4200\tilde{r}^8 - 6400\tilde{r}^6 + 5760\tilde{r}^4 - 3072\tilde{r}^2 + 1024)]^2}, \tag{3.36}$$

para las densidades de energía de los seis primeros modelos.

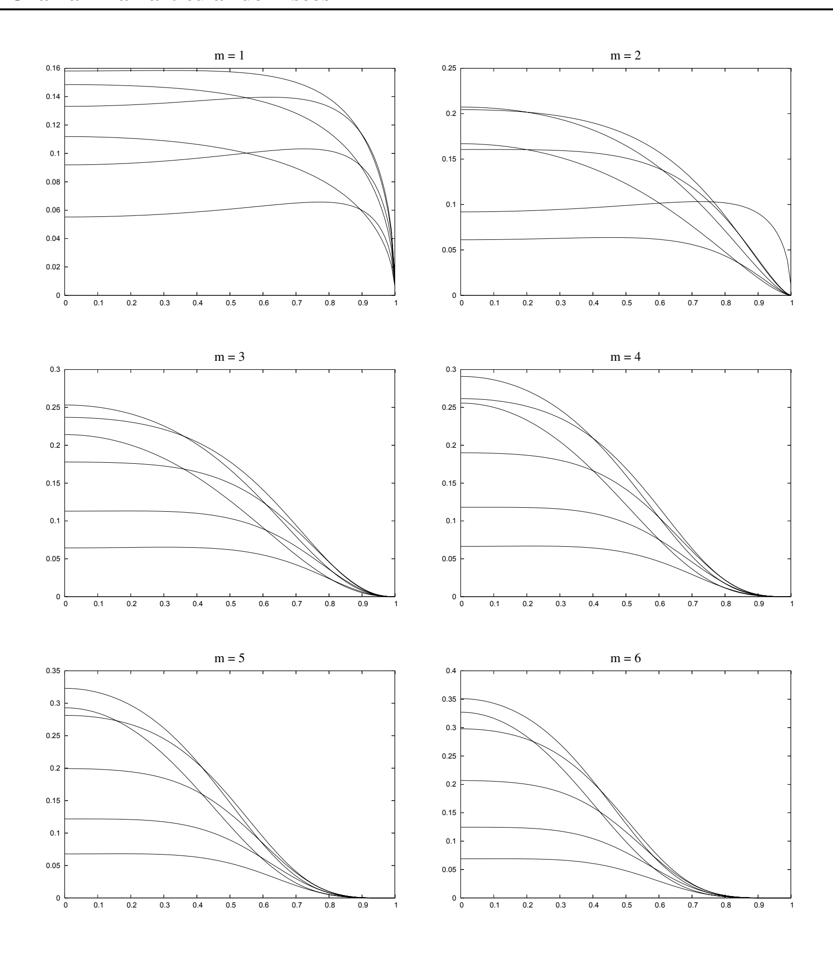


Figura 3.1: Densidad de energía superficial $\tilde{\epsilon}_m$ en función de $\tilde{r}$ para los primeros seis modelos de discos con $m = 1, 2, 3, 4, 5, 6$. En cada caso, se grafica $\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r})$ para $0 \leq \tilde{r} \leq 1$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{k}$. Primero se toma $\tilde{k} = -0{,}25$, la curva en la parte inferior, y luego $\tilde{k} = -0{,}5$, -1, -2, -4 y -8.

En la figura 3.1 se grafica, la densidad de energía superficial adimensional $\tilde{\epsilon}_m$ como una función de $\tilde{r}$ para los primeros seis modelos con m = 1, 2, 3, 4, 5 y 6. En cada caso, se grafica $\tilde{\epsilon}_m(\tilde{r})$ para $0 \leq \tilde{r} \leq 1$ con diferentes valores de los parámetros $\tilde{k}$. Primero se toma $\tilde{k} = -0{,}25$, la curva en la parte inferior en cada cuadro, y luego $\tilde{k} = -0{,}5$, -1, -2, -4 y -8. Como se puede ver, en todos los casos la densidad de energía es positiva en todas partes y se anula en el borde del disco. Nótese que exhibe diferentes comportamientos dependiendo de los valores de m y $\tilde{k}$. Así, para los primeros dos modelos

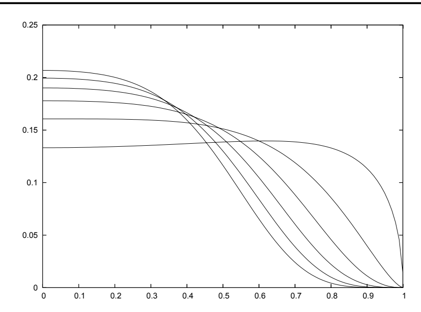


Figura 3.2: Densidad de energía superficial $\tilde{\epsilon}_m$ en función de $\tilde{r}$ con $\tilde{k} = -1$ para los seis modelos de discos con $m = 1, ... , 6$.

con $m = 1$ y $m = 2$, se encuentra que para pequeños valores de $|\tilde{k}|$ la densidad de energía presenta un máximo cerca el borde del disco, mientras que para valores grandes de $|\tilde{k}|$ el máximo ocurre en el centro del disco. De otra parte, para $m > 3$ se encuentra que los valores de $|\tilde{k}|$ el máximo de la densidad de energía ocurre en el centro del disco.

También se puede ver que como los valores m se incrementan, la densidad de energía se concentra más en el centro del disco. También, conforme m aumenta el valor de la densidad de energía en la parte central de los discos se incrementa de modo que, para un valor dado de $\tilde{k}$, la densidad de energía central es mayor para valores mayores de m. De otra parte, en el borde de los discos el comportamiento es opuesto, los valores de la densidad de energía decrecen conforme m se incrementa. Ahora, con la intención de ver esto, en la figura 3.2 se grafica la densidad de energía adimensional $\tilde{\epsilon}_m$ como una función de $\tilde{r}$ con $\tilde{k} = -1$ para los modelos de discos con $m = 1, ... , 6$. Finalmente, para un valor dado de m, el valor de la densidad de energía crece con el valor de $|\tilde{k}|$, pero luego decrece conforme$|\tilde{k}|$ se incrementa. Esto se describe en la figura 3.3 donde se grafica la densidad de energía adimensional en el centro de los discos, $\tilde{\epsilon}(0)$, como función de $\tilde{k}$ para los mismos seis modelos previamente considerados. Ahora bien, como la densidad de carga de los discos es igual, excepto por un signo, a su densidad de energía, todos los análisis previos son también aplicables al comportamiento de la densidad superficial de carga de los modelos.

A manera de conclusión del tema estudiado en el presente capítulo se puede decir que, se ha presentado una familia infinita de discos axialmente simétricos de extensión finita con densidad superficial de energía y carga eléctrica bien comportados. Los discos fueron obtenidos solucionando el sistema de ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío para un espaciotiempo conformestático. Con el fin de obtener las soluciones, se asumió una dependencia funcional entre el potencial eléctrico y la función métrica y entre esta y una función auxiliar. las soluciones fueron entonces expresadas en términos de una solución de la ecuación de Laplace correspondiente a una familia de discos newtonianos delgados de radios finitos, los discos de Kalnajs generalizados [30].

Los discos delgados relativistas aquí presentados poseen una densidad de carga eléctrica que es igual, excepto por un signo, a su densidad de energía, constituyendo así un ejemplo de los comúnmente llamadas “discos contrapuestos eléctricamente”. La densidad de energía de los discos es siempre positiva y bien comportada, cayendo a cero en el borde. También, conforme los valores de m se incre-

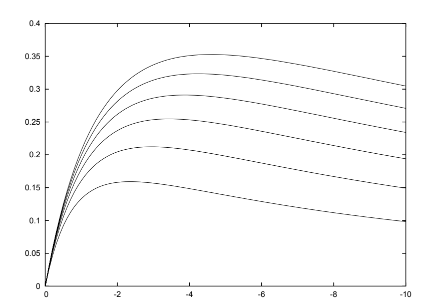


Figura 3.3: Densidad de energía superficial en el centro de los discos, $\tilde{\epsilon}(0)$, en función de $\tilde{k}$ para los mismos seis modelos de discos previamente considerados.

mentan, la densidad de energía es más concentrada en el centro de los discos, con un máximo en $r = 0$ para todos los valores de $|\tilde{k}|$. No obstante, para los dos primeros modelos con $m = 1$ y $m = 2$, para valores pequeños de $|\tilde{k}|$ la densidad energía presenta un máximo cerca al borde del disco, mientras que para valores grandes de $|\tilde{k}|$ el máximo ocurre en el centro del disco.

Además, como la densidad de energía de los discos es siempre positiva y los discos están constituidos por polvo, todos los modelos están en completo acuerdo con todas las condiciones de energía, un hecho de particular relevancia en el estudio de modelos relativistas de discos delgados. En efecto, tal como se mencionó en la introducción al capítulo, muchos de los modelos relativistas de discos delgados estudiados en la literatura no está en completo acuerdo con estas condiciones.

Como se puede ver de las ecuaciones en la sección 3.2, el procedimiento aquí expuesto puede ser aplicado no sólo para obtener espciotiempos conformestáticos axisimétricos sino también puede usarse para obtener soluciones no-axilmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío. Por consecuencia, los modelos aquí expuestos pueden ser generalizados tomando para la función auxiliar U soluciones de la ecuación de Laplace sin la simetría axial impuesta. Esta idea sigue el curso de una trabajo pendiente. Del mismo modo, la generalización a espaciotiempos conformestacionarios con campo magnético.

CAPÍTULO 4

Discos de Polvo Contrarrotantes Alrededor de un Agujero Negro de Schwarzschild

---

Índice

4.1. Introducción

En el capítulo a continuación, una familia de nuevas soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espaciotiempos estáticos axialmente simétricos es presentada. Toda las funciones métricas de las soluciones son calculadas explícitamente y las expresiones obtenidas son simples escritas en términos de las coornadas esferoidales oblatas. Además, las soluciones son asintóticamente planas y regulares en todas partes, tal como se muestra calculando los escalares de curvatura. Estas soluciones describen una familia infinita de discos de polvo delgados con un borde interno central, cuyas densidades de energía son siempre positiva y bien comportada, de tal modo que su tensor energía-momentum satisface todas las condiciones de energía. Ahora, aunque los discos son de extensión infinita, todos tienen masa finita. La superposición del primer miembro de esta familia con un agujero negro de Schwararzschild fue presentada en [31].

También se presenta una familia infinita de soluciones exactas, completamente integrada explícitamente, de las ecuaciones de Einstein correspondiente a la superposición de un disco de polvo contrarrotante con un agujero negro. La solución obtenida representa un disco anular delgado infinito (un disco con un borde interno) alrededor de un agujero negro de Scchwarzschild. La masa del disco es finita y el tensor de energía-momentum cumple con todas las condiciones de energía. Además, la masa total del disco en presencia del agujero negro es menor que cuando el disco está solo. La solución puede interpretarse también como si describiera un disco delgado constituido por dos fluidos de polvo contrarrotantes que satisfacen también las condiciones de energía.

Con el fin de describir un espaciotiempo estático axialmente simétrico con un disco infinitesimal-

mente delgado como fuente, se hace la transformación

$$\begin{aligned}\mathcal{R}(r,z) &\to r,\\ \mathcal{Z}(r,z) &\to z,\\ \mathcal{A}(r,z) &\to 0,\\ \Psi(r,z) &\to \Phi(r,z),\\ \Pi(r,z) &\to \Lambda(r,z),\end{aligned}$$

que deja el elemento de Weyl-Lewys-Papapetrou (2.5) en la forma [84]

$$ds^2 = -\, e^{2\Phi}dt^2 + e^{-2\Phi}[r^2 d\varphi^2 + e^{2\Lambda}(dr^2 + dz^2)], \tag{4.1}$$

en donde las coordenadas $x^a = (t, \varphi, r, z)$ son las usuales coordenadas cilíndricas, y se hace uso del formalismo general descrito en el Capítulo 2 según el cual existe en el espaciotiempo un disco infinitesimalmente delgado, localizado en la hipersuperficie $z = 0$, de modo que las componentes del tensor métrico son funciones simétricas de z y que sus primeras derivadas con respecto a z poseen una discontinuidad finita en $z = 0$.

Para esta métrica, las únicas componentes no nulas del tensor energía-momentum Q_{ab} son

$$2e^{2(\Phi-\Lambda)}\left[\Lambda_{,z} - 2\Phi_{,z}\right] = Q^t_t, \tag{4.2a}$$

$$2e^{2(\Phi-\Lambda)}\Lambda_{,z} = Q^\varphi_\varphi, \tag{4.2b}$$

donde todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$. Ahora bien, usando la tétrada ortonormal

$$V^a = e^{-\Phi}\,\delta^a_t, \tag{4.3a}$$

$$W^a = e^{\Phi}\,\delta^a_\varphi/r, \tag{4.3b}$$

$$X^a = e^{\Phi-\Lambda}\,\delta^a_r, \tag{4.3c}$$

$$Y^a = e^{\Phi-\Lambda}\,\delta^a_z, \tag{4.3d}$$

se puede escribir el tensor energía-momentum Q_{ab} en la forma canónica

$$Q_{ab} = \epsilon V_a V_b + p W_a W_b, \tag{4.4}$$

donde ϵ y p son, respectivamente, la densidad de energía y la presión azimutal del disco. En términos de estas cantidades, las condiciones de frontera pueden ser escritas como

$$4e^{2(\Phi-\Lambda)}\left[1 - r\Phi_{,r}\right]\Phi_{,z} = \epsilon, \tag{4.5a}$$

$$4e^{2(\Phi-\Lambda)} r\Phi_{,r}\Phi_{,z} = p, \tag{4.5b}$$

donde, como arriba, todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$.

Como se puede ver de las expresiones anteriores, el tensor energía-momentum más general compatible con el elemento de linea (4.1), corresponde a una fuente discoidal con densidad de energía y presión azimutal diferentes de cero. En acuerdo con esto, en lugar de suponer prescripciones específicas para la densidad de energía y la presión azimutal, se solucionarán las ecuaciones de Einstein requiriendo sólo que estas dos cantidades serán diferente de cero en la superficie de un disco con un borde interno central. Luego, dada una solución, esta puede usarse para obtener, a partir de las condiciones de frontera, las correspondientes expresiones para la densidad de energía y la presión azimutal. Por consecuencia, las soluciones corresponderán a la clase más general de discos estáticos delgados con borde interno central que puedan ser obtenidos solucionando exactamente las ecuaciones de Einstein.

De esta manera, debido a que se pretende obtener una solución interpretable como un disco delgado localizado en la hipersuperficie $z = 0$, con un borde interno central de radio a, sólo es necesario imponer que

$$\Phi_{,z}(r, 0^+) = \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq r \leq a, \\ f(r) & ; \quad r \geq a, \end{cases} \tag{4.6}$$

con $f(r)$ cualquier función arbitraria. Entonces, sólo después de hallar la solución más general, se imponen condiciones adicionales dado que se quieren comportamientos físicamente razonables. Así, con el fin de obtener un espaciotiempo asintóticamente plano, se requiere que

$$\lim_{R\to\infty} \Phi(r, z) = 0, \tag{4.7a}$$

$$\lim_{R\to\infty} \Lambda(r, z) = 0, \tag{4.7b}$$

donde $R^2 = r^2 + z^2$. También, con el fin de tener regularidad en el eje de simetría, se requiere que

$$\Phi(0, z) < \infty, \tag{4.8a}$$

$$\Lambda(0, z) < \infty. \tag{4.8b}$$

También se requiere que

$$f(r) \geq 0, \tag{4.9a}$$

$$0 \leq r\Phi_{,r} \leq 1, \tag{4.9b}$$

con tal que la densidad de energía y presión azimutal sean positiva en todas partes. Finalmente, se necesita analizar la finitud de la masa total de los discos. Así, con esta intención, primero se toma la densidad de masa μ de los discos definida por

$$\frac{\mu}{2} = (Q_{ab} - \frac{1}{2}g_{ab}Q)V^aV^b, \tag{4.10}$$

donde $Q = g^{ab}Q_{ab}$ y, como antes, todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$. Así, usando (4.2) y (4.4), se tiene que la densidad de masa se reduce a

$$\mu = \epsilon + p. \tag{4.11}$$

De otra parte, la masa total de los discos está dada por

$$M = \int \mu d\Sigma = \int_0^{2\pi} \int_a^{\infty} \mu e^{\Lambda - 2\Phi} r dr d\varphi, \tag{4.12}$$

donde $d\Sigma = e^{\Lambda-2\Phi} r dr d\varphi$ es el elemento de área sobre la superficie del disco. Entonces, usando (4.11), se puede escribir la masa total como

$$M = 2\pi \int_a^{\infty} (\epsilon + p) e^{\Lambda - 2\Phi} r dr, \tag{4.13}$$

donde ya se ha hecho la integración sobre φ.

4.2. Discos Delgados con Borde Interno Central

Con el propósito de solucionar las ecuaciones de Einstein en el vacío, en primera instancia se tiene que solucionar el problema de valor en la frontera para Φ. Ahora bien, debido a la paridad de las funciones métricas respecto del la superficie del disco, es conveniente escoger un nuevo sistema de coordenadas que se adapten naturalmente a la geometría de la fuente deseada. Por tal razón, se introducen las coordenadas esferoidales oblatas definidas a través de la relaciones

$$r^2 = a^2(1 + x^2)(1 - y^2), \tag{4.14a}$$

$$z = axy, \tag{4.14b}$$

donde $-\infty < x < \infty$ y $0 \leq y \leq 1$. Así, cuando $x = 0$ se tiene que $z = 0$ y $0 \leq r \leq a$, mientras que cuando $y = 0$ se tiene que $z = 0$ y $r \geq a$. Además, como x cambia de signo al atravesar la superficie $y = 0$, pero no cambia en valor absoluto, esta coordenada presenta una discontinuidad finita en $y = 0$. Entonces, una función par de x es continua en todas partes pero tiene una derivada normal discontinua en $y = 0$. De otra parte, y es continua en todas partes. En consecuencia, la superficie $y = 0$ describe un disco con un borde interno de radio a, mientras que la superficie $x = 0$ describe un “hueco vacío” con borde en el disco.

En las coordenadas esferoidales oblatas, el elemento de linea de Weyl (4.1) puede ser escrito como

$$ds^2 = -e^{2\Phi}dt^2 + a^2(1 + x^2)(1 - y^2)e^{-2\Phi}d\varphi^2 + a^2(x^2 + y^2)e^{2(\Lambda-\Phi)}\left[\frac{dx^2}{1 + x^2} + \frac{dy^2}{1 - y^2}\right], \tag{4.15}$$

de modo que las ecuaciones de Einstein en el vacío se reducen a

$$[(1 + x^2)\Phi_{,x}]_{,x} + [(1 - y^2)\Phi_{,y}]_{,y} = 0, \tag{4.16}$$

la ecuación de Laplace en coordenadas esferoidales oblatas, y el sistema sobredeterminado

$$\begin{aligned}\Lambda_{,x} &= (1-y^2)\left[x(1+x^2)\Phi_{,x}^2 - x(1-y^2)\Phi_{,y}^2\right.\\ &\left. - 2y(1+x^2)\Phi_{,x}\Phi_{,y}\right]/(x^2+y^2),\end{aligned} \quad (4.17)$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{,y} &= (1+x^2)\left[y(1+x^2)\Phi_{,x}^2 - y(1-y^2)\Phi_{,y}^2\right.\\ &\left. + 2x(1-y^2)\Phi_{,x}\Phi_{,y}\right]/(x^2+y^2),\end{aligned} \quad (4.18)$$

cuya integrabilidad está garantizada nuevamente por la ecuación (4.16).

De otra parte, usando (4.14a) y (4.14b), es fćil ver que

$$\Phi_{,z}(r,0) = \begin{cases} \Phi_{,x}(0,y)/ay & ; \quad 0 \le r \le a, \\ \\ \Phi_{,y}(x,0)/ax & ; \quad r \ge a. \end{cases} \quad (4.19)$$

Consecuentemente, como la simetría de reflexión de las soluciones implica que

$$\Phi(-x,y) = \Phi(x,y), \quad (4.20a)$$

$$\Phi_{,x}(-x,y) = -\Phi_{,x}(x,y), \quad (4.20b)$$

las condiciones (4.6) son equivalentes a

$$\Phi_{,x}(0,y) = 0, \quad (4.21a)$$

$$\Phi_{,y}(x,0) = F(x); \quad x \ge 0, \quad (4.21b)$$

con $F(x)$ una función arbitraria. La solución más general de la ecuación (4.16) con estas condiciones de frontera está dada por [2]

$$\Phi(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty}[A_{2n}P_{2n}(y) + B_{2n}Q_{2n}(y)]p_{2n}(x), \quad (4.22)$$

donde A_{2n} y B_{2n} son constantes, $P_{2n}(y)$ y $Q_{2n}(y)$ son los polinomios de Legendre y las funciones de Legendre de segunda clase, respectivamente, y $p_{2n}(x) = i^{-2n}P_{2n}(ix)$. En consecuencia, todas las soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío para espaciotiempos estáticos con cualquier fuente axialmente simétrica como la considerada aquí son obtenidas tomando para la función métrica $\Phi(x,y)$ cualquier elección particular de la solución general anterior, o expresiones obtenidas a partir de estas soluciones por medio de operaciones lineales. Ahora, en términos de las coordenadas esferoidales oblatas, la condición (4.7a) se escribe como

$$\lim_{x\to\infty} \Phi(x,y) = 0, \quad (4.23)$$

mientras que la condición (4.8a) se escribe como

$$\Phi(x,1) < \infty. \quad (4.24)$$

Así, debido al comportamiento de las funciones de Legendre, es claro que no es posible satisfacer las condiciones física (4.7) y (4.8) con cualquier escogencia particular de la solución general (4.22). Sin embargo, considerando solo el primer término de la serie,

$$\Phi_0(x, y) = A_0 + B_0 Q_0(y), \tag{4.25}$$

se obtiene una solución que es regular para todo $y \neq 1$. Entonces, si se toma $A_0 = 0$, esta solución puede escribirse como

$$\Phi_0(x, y) = \frac{\alpha}{2} \ln \left[\frac{1 + y}{1 - y} \right], \tag{4.26}$$

donde α es una constante arbitraria, de tal modo que una integración directa de (4.17)-(4.18) da

$$\Lambda_0(x, y) = \frac{\alpha^2}{2} \ln \left[\frac{1 - y^2}{x^2 + y^2} \right], \tag{4.27}$$

donde se ha tomado la constante de integración como cero. Como se puede ver, esta solución es no asintóticamente plana ni regular en el eje de simetría.

Sin embargo, usando (4.5), se obtiene para la densidad de energía y la presión azimutal las expresiones

$$\epsilon = (4\alpha/a) x^{2\alpha^2 - 1}, \tag{4.28}$$

$$p = 0, \tag{4.29}$$

de tal modo que, si $\alpha > 0$, los discos satisfacen todas las condiciones de energía [39]. Así, para cualquier valor de $\alpha^2 \neq \frac{1}{2}$, la densidad de energía crece ilimitadamente, en el infinito o en el borde interno del disco; mientras que para alfa $\alpha^2 = \frac{1}{2}$ la densidad de energía es siempre constante, tal que, en cualquier caso, la masa total del disco será infinita.

De otra parte, aunque las soluciones previas no tienen un comportamiento físico aceptable, es posible usar esta como punto de partida para generar una solución nueva y bien comportada. Para este fin, se consideran las coordenadas esferoidales oblatas no sólo como funciones de las coordenadas cilíndricas, (r, z), sino también como paramétricamente dependiente del radio a,

$$x = x(r, z; a), \tag{4.30a}$$

$$y = y(r, z; a). \tag{4.30b}$$

Asimismo, suponiendo también que Φ depende paramétricamente de a,

$$\Phi = \Phi(r, z; a), \tag{4.31}$$

se puede obtener una nueva familia de soluciones aplicando la operación lineal

$$\Phi_{n+1}(r, z; a) = \frac{\partial \Phi_n(r, z; a)}{\partial a}, \tag{4.32}$$

donde n es un entero, $n \geq 0$.

Entonces, a partir de la "solución semilla" $\Phi_0(x, y)$, es posible generar, por medio del procedimiento previo, una nueva familia de soluciones que pueden ser escritas en la forma simple

$$\Phi_n(r, z; a) = \Phi_n(x, y) = \frac{\alpha y F_n(x, y)}{a^n (x^2 + y^2)^{2n-1}}, \tag{4.33}$$

para $n \geq 1$, donde los $F_n(x, y)$ son funciones polinómicas cuyo mayor grado es $4n - 4$, de las cuales los tres primeros son,

$$\begin{aligned} F_1 &= 1, \\ F_2 &= x^4 + 3x^2(1 - y^2) - y^2, \\ F_3 &= 3x^6(3 - 5y^2) + 5x^4(6y^4 - 11y^2 + 3) \\ &- x^2y^2(3y^4 - 31y^2 + 30) - y^4(y^2 - 3), \end{aligned}$$

pero todos ellos puede obtenerse fácilmente por medio de (4.32). Así, es fácil ver que

$$\lim_{x \to \infty} \Phi_n(x, y) = 0, \tag{4.34}$$

y que

$$\Phi_n(x, 1) < \infty, \tag{4.35}$$

están en completo acuerdo con las condiciones (4.7a) y (4.8a).

Ahora, con el fin de obtener las correspondientes funciones métricas $\Lambda_n(r, z; a)$, se hace la integración

$$\Lambda_n(r, z; a) = \Lambda_n(x, y) = \int_1^y \Lambda_{,y}(x, y) dy, \tag{4.36}$$

tomando $\Lambda_n(x, 1) = 0$ para garantizar la regularidad en ele eje. Así, poniendo (4.33) en (4.18), las soluciones pueden ser escritas en la forma simple

$$\Lambda_n(x, y) = \frac{\alpha^2 (2n - 2)!(y^2 - 1) A_n(x, y)}{4^n a^{2n} (x^2 + y^2)^{4n}}, \tag{4.37}$$

para $n \geq 1$, donde los $A_n(x, y)$ son funciones polinómicas, cuyo mayor grado es $8n - 2$, de los cuales

se presentan aquí sólo los tres primeros

$$
\begin{aligned}
A_1 &= x^4(9y^2 - 1) + 2x^2y^2(y^2 + 3) + y^4(y^2 - 1),\\
\\
A_2 &= 2x^{12}(9y^2 - 1) - 4x^{10}(51y^4 - 41y^2 + 2)\\
&+ x^8(735y^6 - 1241y^4 + 419y^2 - 9) - x^6y^2(132y^6\\
&- 1644y^4 + 1604y^2 - 252) + x^4y^4(84y^6 - 384y^4\\
&+ 1266y^2 - 630) + 4x^2y^6(6y^6 + 6y^4 - 39y^2 + 63)\\
&+ 3y^8(y^6 + y^4 + y^2 - 3),\\
\\
A_3 &= 3x^{16}(1225y^6 - 1275y^4 + 315y^2 - 9)\\
&- 24x^{14}(980y^8 - 2095y^6 + 1205y^4 - 189y^2 + 3)\\
&+ 2x^{12}(24255y^{10} - 89475y^8 + 98472y^6 - 36316y^4\\
&+ 3473y^2 - 25) - 12x^{10}y^2(1835y^{10} - 16665y^8\\
&+ 34716y^6 - 25292y^4 + 6001y^2 - 275)\\
&+ 6x^8y^4(900y^{10} - 11946y^8 + 50563y^6 - 69397y^4\\
&+ 33365y^2 - 4125) + 8x^6y^6(125y^{10} + 926y^8\\
&- 9079y^6 + 24639y^4 - 22290y^2 + 5775)\\
&+ 6x^4y^8(55y^{10} + 29y^8 + 764y^6 - 4808y^4 + 8469y^2\\
&- 4125) + 12x^2y^{10}(5y^{10} + 5y^8 + 80y^4 - 301y^2\\
&+ 275) + y^{12}(5y^{10} + 5y^8 + 5y^6 + y^4 + 34y^2 - 50),
\end{aligned}
$$

todos ellos pueden obtenerse como un resultado del cálculo de la integral (4.36). Acordemente, se tiene que

$$\lim_{x\to\infty} \Lambda_n(x, y) = 0, \tag{4.38}$$

y que

$$\Lambda_n(x, 1) = 0, \tag{4.39}$$

en completo acuerdo con las condiciones (4.7b) y (4.8b).

4.2.1. Comportamiento de las Soluciones

Como se puede ver de las expresiones en la sección previa, usando (4.32) se generó una familia infinita de soluciones asintóticamente planas, todas con un comportamiento regular en el eje de simetría. De otra parte, parece ser que existe una singularidad en el borde interno de los discos, cuando $x = 0$ and $y = 0$. Sin embargo, es fácil ver que esta aparente singularidad es sólo una singularidad coordenada. Ahora bien , como es ampliamente conocido de [84, 95], la caracterización invariante de la curvatura puede darse en términos de 14 escalares construidos a partir del tensor de Riemann, R_{abcd}, y el tensor métrico, g_{ab}. Así que, en orden a determinar la naturaleza de las aparentes singularidades, se tiene que calcular todos los invariantes de curvatura para la familia de soluciones.

Ahora, para cualquier solución de las ecuaciones de Einstein, los invariantes de curvatura son los 10 componentes nulos del tensor de Ricci, $R_{ab} = 0$, más los cuatro escalares

$$\begin{aligned}
\mathcal{K}_I &= R^{abcd} R_{abcd}, \\
\mathcal{K}_{II} &= R^{ab}{}_{kl} R^{klcd} R_{abcd}, \\
\mathcal{K}_{III} &= \frac{\epsilon^{ab}{}_{kl} R^{klcd} R_{abcd}}{\sqrt{-g}}, \\
\mathcal{K}_{IV} &= \frac{\epsilon^{ab}{}_{kl} R^{kl}{}_{mn} R^{mncd} R_{abcd}}{\sqrt{-g}},
\end{aligned}$$

donde $g = \det g_{ab}$ y ϵ^{abcd} es el símbolo de Levi-Civita. Además, para cualquier solución de Weyl los dos últimos invariantes se anulan idénticamente, de modo que sólo es necesario calcular $\mathcal{K}_I$ y $\mathcal{K}_{II}$.

Usando las expresiones (4.33) y (4.37) para $\Phi_n(x, y)$ y $\Lambda_n(x, y)$, se pueden tener los escalares de curvatura como

$$\mathcal{K}_{In} = -\frac{16\alpha^2 e^{4(\Phi_n - \Lambda_n)} N_{In}(x, y)}{a^{6n+4}(x^2 + y^2)^{12n}}, \tag{4.40a}$$

$$\mathcal{K}_{IIn} = \frac{48\alpha^3 e^{6(\Phi_n - \Lambda_n)} N_{IIn}(x, y)}{a^{8n+6}(x^2 + y^2)^{16n}}, \tag{4.40b}$$

donde $N_{In}(x, y)$ y $N_{IIn}(x, y)$ son funciones polinómicas, cuyo máximo orden es $24n - 6$ y $32n - 9$, respectivamente, los cuales no se escriben debido a su gran extensión, pero que todos se anulan en el borde interno de los discos,

$$N_{In}(0, 0) = N_{IIn}(0, 0) = 0. \tag{4.41}$$

Además, es fácil ver que, en cualquier vecindad alrededor de $(0, 0)$, la diferencia entre $\Phi_n(x, y)$ y $\Lambda_n(x, y)$ se comporta como

$$\Phi_n - \Lambda_n \approx -\frac{\alpha^2}{a^{2n}(x^2 + y^2)^{2n}}, \tag{4.42}$$

de tal modo que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{4(\Phi_n - \Lambda_n)}}{(x^2 + y^2)^{12n}} = 0, \tag{4.43a}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{e^{6(\Phi_n - \Lambda_n)}}{(x^2 + y^2)^{16n}} = 0, \tag{4.43b}$$

y los límites existen, cualquiera que sea la trayectoria escogida para aproximarse al punto $(0, 0)$. Acordemente, se tiene que

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathcal{K}_{In}(x, y) = 0, \tag{4.44a}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \mathcal{K}_{IIn}(x, y) = 0, \tag{4.44b}$$

y entonces la curvatura es regular en el borde interno de los discos.

Ahora, con el fin de analizar el comportamiento físico de las fuentes, se calculará la densidad de energía y la presión azimutal para estas familias de discos. Así, usando (4.14a) y (4.14b), se puede ver que

$$\Phi_{,r}(r,0) = \left[\frac{\sqrt{1+x^2}}{ax} \right] \Phi_{,x}(x,0), \qquad r \geq a, \tag{4.45}$$

y, usando (4.33), es fácil probar que

$$\Phi_{n,x}(x,0) = 0, \qquad n \geq 1. \tag{4.46}$$

Entonces, de (4.5b), se puede ver que

$$p_n = 0. \tag{4.47}$$

Esto es, todos los discos de la familia tienen presión azimutal cero.

De otro lado, usando las ecuaciones (4.5a), (4.19) y (4.33), la densidad superficial de energía de los discos puede ser escrita como

$$\epsilon_n(x) = \frac{4\alpha E_n(x)}{a^{n+1} x^{2n+1}} \exp\left\{ -\frac{\alpha^2 (2n-2)! B_n(x)}{2^{2n-1} a^{2n} x^{4n}} \right\}, \tag{4.48}$$

donde $x \geq 0$ y las cantidades $E_n(x)$ positivo definidos de grado $2k$, con $k = (n-1)/2$ para n impar y $k = n/2$ para n para, de los cuales a continuación se escriben sólo los tres primeros términos,

$$\begin{aligned} E_1(x) &= 1, \\ E_2(x) &= x^2 + 3, \\ E_3(x) &= 3(x^2 + 5), \end{aligned}$$

mientras que los $B_n(x)$ son polinomios positivo definidos de grado $4k$, con $k = (n-1)/2$ para n impar y $k = n/2$ para n impar, de cuyos tres primeros tres términos están dados por

$$\begin{aligned} B_1(x) &= 1, \\ B_2(x) &= 2x^4 + 8x^2 + 9, \\ B_3(x) &= 27x^4 + 72x^2 + 50. \end{aligned}$$

De las expresiones anteriores se puede ver que, tomando $\alpha > 0$, la densidad de energía de los discos será positiva siempre,

$$\epsilon_n(x) \geq 0. \tag{4.49}$$

Así, como la presión azimutal es cero, se tiene una familia infinita de discos de polvo que están en completo acuerdo con todas las condiciones de energía. También es fácil que, para cualquier valor de

n, se tiene que

$$\epsilon_n(0) = 0, \tag{4.50a}$$

$$\lim_{x\to\infty} \epsilon_n(x) = 0. \tag{4.50b}$$

Esto es, la densidad de energía de los discos es cero en su borde interno y se anula en el infinito. Además, como la presión azimutal, la densidad de masa de los discos se reduce a su densidad de energía,

$$\mu_n(x) = \epsilon_n(x), \tag{4.51}$$

tal que su comportamiento es el mismo que la densidad de energía.

Ahora, con el fin de mostrar el comportamiento de la densidad de energía, se grafica la densidad superficial de energía adimensional $\tilde{\epsilon}_n = a\epsilon_n$ como funciones de la coordenada radial adimensional $\tilde{r} = r/a$. Así, en la figura 4.1, se grafica $\tilde{\epsilon}_n$ como una función de $\tilde{r}$ para los primeros tres términos de la familia, con $n = 1$, 2 y 3, para diferentes valores de los parámetros $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Entonces, par cada valor de n, se tiene $\tilde{\alpha}_n = 0{,}5$, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5 y 4. La primera curva de la izquierda corresponde a $\tilde{\alpha}_n = 0{,}5$, mientras que la última curva en el lado derecho corresponde a $\tilde{\alpha}_n = 4$. Tal como se puede ver, en todos los casos la densidad de energía superficial es siempre positiva, con un máximo cerca al borde interno de los discos, y luego decrece rápidamente como $\tilde{r}$ crece. Se puede ver que, para un valor fijo de n, conforme los valores de $\tilde{\alpha}_n$ crecen, los valores de los máximos disminuyen y se mueven hacia los valores en que $\tilde{r}$ crece. El mismo comportamiento se observa para un valor fijo de $\tilde{\alpha}_n$ incrementando n.

De otra parte usando, (4.13), (4.14a) y (4.51), la masa de los discos puede expresarse como

$$M_n = 2\pi a \int_0^\infty f_n(x)dx, \tag{4.52}$$

donde

$$f_n(x) = xe^{-\Lambda_n(x,0)}\epsilon_n(x). \tag{4.53}$$

Así, de (4.37), (5.2) y (4.53), es fácil ver que

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\epsilon_{n+1}(x)}{\epsilon_n(x)}, \tag{4.54a}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{E_{n+1}(x)}{ax^2E_n(x)}, \tag{4.54b}$$

$$= \begin{cases} \frac{1}{a} & ; \quad n = 2k+1, \\ 0 & ; \quad n = 2k+2, \end{cases} \tag{4.54c}$$

con $k \geq 0$. Por consecuencia, mediante el criterio de comparación de los límites para integrales impropias, la convergencia de M_{n+1} está garantizada si M_n es convergente, y entonces sólo es necesario probar la convergencia de M_1. En efecto, mediante un simple cálculo se tiene

$$M_1 = 2\pi\sqrt{2a\alpha}\,\Gamma(1/4), \tag{4.55}$$

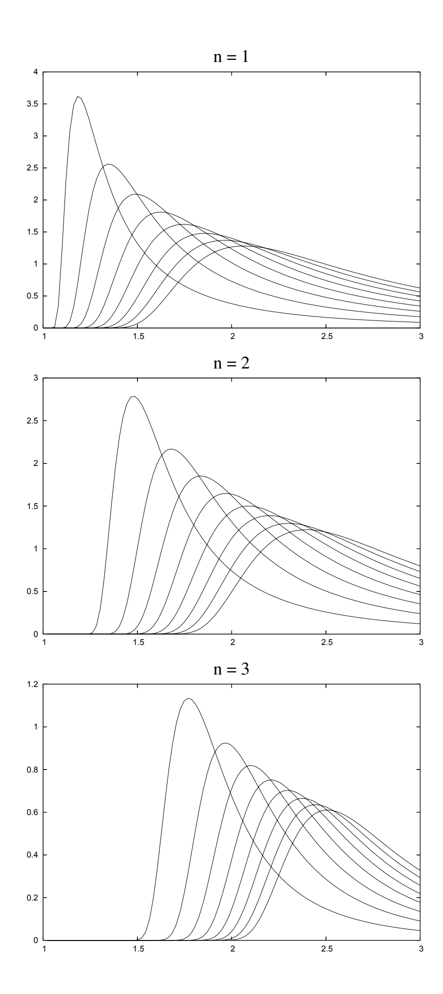


Figura 4.1: Densidad superficial de energía $\tilde{\epsilon}_n$ en función de $\tilde{r}$ para los tres primeros discos de la familia, con $\tilde{\alpha}_n$ = 0,5, 1, 1,5, 2, 2,5, 3, 3,5 y 4. Para cada valor de n, la primera curva a la izquierda corresponde a $\tilde{\alpha}$ = 0,5, mientras que la última curva a la derecha corresponde a $\tilde{\alpha}$ = 4.

lo que garantiza así la convergencia de las integrales de masa (4.52). Consecuentemente, aunque los discos son de extensión infinita, todos tienen masa finita.

En conclusión, se ha presentado una familia infinita de soluciones de las ecuaciones de Einstein en el vacío asintóticamente planas y regulares en todas partes. Estas soluciones describen una familia infinita de discos delgados con un borde interno central constituidos por materia de polvo, cuya densidad de energía es siempre positiva y bien comportada, de tal modo que su tensor energía-momentum está en completo acuerdo con todas las condiciones de energía. Además, aunque los discos son de extensión infinita, todos tienen masa finita.

Ahora, como las funciones métricas de las soluciones son calculadas explícitamente, estas constituyen la primera familia de soluciones exactas explícitas completamente integradas para tal clase de fuentes de discos delgados. Además, su relativa simplicidad cuando son expresadas en coordenadas esferoidales oblatas, permite estudiar muy fácilmente sus diferentes aspectos dinámicos, como el movimiento de partículas dentro y fuera de los discos y la estabilidad de las órbitas.

Aparte de su importancia como una nueva familia de soluciones exactas y soluciones explícitas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, la principal importancia de esta familia de soluciones es que ell puede ser fácilmente superpuesta con la solución de Schwarzschild con el fin de obtener la descripción de un sistema binario compuesto por un disco delgado alrededor de un agujero negro central. En efecto, la superposición del primer miembro de esta familia con un agujero negro de Swarzschild fue obtenida y presentada en in [31]; en la próxima sección se presentará un análisis detallado de la superposición de la familia completa. Consecuentemente, como las familias presentadas aquí, su superposición con el agujero negro de Swarszchild será la primera familia de soluciones exactas integradas explícitamente para esta superposición de fuentes.

Ahora, como en la teoría newtoniana el potencial gravitacional está dado por la solución del problema de valores en la frontera para la ecuación de Laplace, se puede considerar $\Phi_n(r, z; a)$ como una familia de potenciales gravitacionales newtonianos de fuentes discoidales con borde interno, cuyas densidades de masa newtoniana están dadas por

$$\sigma_n(x) = \frac{2\alpha E_n(x)}{a^{n+1} x^{2n+1}}, \tag{4.56}$$

claramente divergente en el borde de los discos. Por consecuencia, se puede concluir que no existen soluciones en la teoría newtoniana que describan el campo gravitacional de un disco delgado con borde interno, mientras que esta clase de fuentes puede ser propiamente descrita por medio soluciones regulares y asintóticamente planas, en el marco de la teoría de la gravitación ofrecida por la relatividad general.

4.3. Discos de Polvo Contrarrotantes Alrededor de un Agujero Negro de Schwarzschild

A continuación se presenta la primera familia de soluciones exactas, completamente integrada explícitamente, de las ecuaciones de Einstein correspondiente a la superposición de un disco de polvo contrarrotante con un agujero negro. La solución obtenida representa un disco anular delgado infinito (un disco con un borde interno) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La masa del disco es finita y el tensor de energía-momentum cumple con todas las condiciones de energía. Además, la masa

total del disco en presencia del agujero negro es menor que cuando el disco está solo. La solución puede interpretarse también como si describiera un disco delgado constituido por dos fluidos de polvo contrarrotantes alrededor de un agujero negro que satisfacen también las condiciones de energía.

Como es sabido, las ecuaciones de campo de Einstein para la métrica de Weyl-Lewys-Papapetrou (2.5) en las coordinates $x^a = (t, \varphi, r, z)$, son

$$\Phi_{,rr} + \frac{1}{r}\Phi_{,r} + \Phi_{,zz} = 0, \tag{4.57a}$$

$$\Lambda_{,r} = r(\Phi_{,r}^2 - \Phi_{,z}^2), \quad \Lambda_{,z} = 2r\Phi_{,r}\Phi_{,z}. \tag{4.57b}$$

Ahora se procederá a superponer los discos de polvo con borde interno central ϕ_n, estudiados en secciones precedentes, alrededor de un agujero negro ψ. Ahora bien, la ecuación (4.57a) es sólo la ecuación de Laplace en coordenaas cilíndricas. La ecuación de Laplace es lineal, de modo que si ϕ_n y ψ son soluciones, lo será también la superposición $\Phi_n = \phi_n + \psi$.

No obstante, se puede ver de (4.57b) que, la función métrica $\Lambda[\Phi_n]$ no puede ser superpuesta dado que esta no es lineal. Sin embargo, se puede demostrar que esta obedece la relación

$$\Lambda[\phi_n + \psi] = \Lambda[\phi_n] + \Lambda[\psi] + 2\Lambda[\phi_n, \psi], \tag{4.58}$$

donde

$$\Lambda[\phi_n, \psi] = \int r\left[(\psi_{,r}\phi_{n,r} - \psi_{,z}\phi_{n,z})dr + (\psi_{,r}\phi_{n,z} + \psi_{,z}\phi_{n,r})dz\right], \tag{4.59}$$

y el primer modelo de discos de polvo con borde interno central es

$$\phi_1(x, y; a) = \frac{\alpha y}{a(x^2 + y^2)}. \tag{4.60}$$

siendo α una constante. Ahora, usando (4.58) y (4.5) se puede calcular el tensor energía-momentum del sistema combinado $\Phi_n = \phi_n + \psi$. Así, la densidad superficial de energía, la presión azimutal y la "densidad newtoniana efectiva" del sistema compuesto es:

$$\varepsilon = 4e^{2\Phi_n - 2\Lambda[\phi_n+\psi]}\{1 - r(\phi_n + \psi)_{,r}\}(\phi_n + \psi)_{,z}, \tag{4.61a}$$

$$p = 4re^{2\Phi_n - 2\Lambda[\phi_n+\psi]}(\phi_n + \psi)_{,r}(\phi_n + \psi)_{,z}, \tag{4.61b}$$

$$\rho = \varepsilon + p = 4e^{2\Phi_n - 2\Lambda[\phi_n+\psi]}(\phi_n + \psi)_{,z}, \tag{4.61c}$$

donde $\Lambda[\phi_n + \psi]$ es dado por (4.58) y todas las cantidades son evaluadas en $z = 0^+$.

De otra parte, la función métrica ψ correspondiente a un agujero negro de Schwarzschild no rotante viene dado por [84]

$$\psi = \frac{1}{2}\ln\left\{\frac{\zeta - 1}{\zeta + 1}\right\}, \tag{4.62}$$

donde ζ y η son las coordenadas esferoidales prolatas, relacionadas con las coordenadas cilíndricas mediante

$$r^2 = m^2(\zeta^2 - 1)(1 - \eta^2), \quad z = m\zeta\eta, \tag{4.63}$$

donde $1 \leq \zeta < \infty$ y $-1 \leq \eta \leq 1$, con m una constante positiva. El otro potencial métrico es

$$\Lambda[\psi] = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - \eta^2} \right\}. \tag{4.64}$$

Resulta de gran utilidad reexpresar las cantidades (4.62) y (4.64) en una forma práctica, que como se verá pronto, facilitará los cálculos en el proceso de superposición. Con esto en mente, se definen las cantidades

$$\mu_1 = -m - z + R_1 \tag{4.65a}$$
$$\mu_2 = m - z + R_2, \tag{4.65b}$$

con

$$R_1^2 = r^2 + (m + z)^2 \tag{4.66a}$$
$$R_2^2 = r^2 + (m - z)^2. \tag{4.66b}$$

A partir de aquí, se obtienen las siguientes identidades útiles:

$$\zeta = \frac{R_1 + R_2}{2m}, \quad \eta = \frac{R_1 - R_2}{2m}, \tag{4.67}$$

entonces, con (4.65b) y (4.67) se obtiene de (4.62) y (4.64) respectivamente

$$\psi = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{\mu_1}{\mu_2} \right\}, \tag{4.68a}$$
$$\Lambda[\psi] = \frac{1}{2} \ln \left\{ \frac{(r^2 + \mu_1 \mu_2)^2}{(\mu_1^2 + r^2)(\mu_2^2 + r^2)} \right\}, \tag{4.68b}$$

que serán las fórmulas a utilizar en la superposisción de los discos alrededor del agujero negro.

Ahora, con el fin de obtener el término mixto $\Lambda[\phi_n, \psi]$ en (4.58) en la superposición, se introduce la relación entre las coordenadas esferoidales prolatas y las cilíndricas mediante

$$x = \frac{R + R^*}{2a}, \quad y = \frac{R - R^*}{2ai} \tag{4.69}$$

con

$$R = \sqrt{r^2 + (z + ai)^2}, \quad R^* = \sqrt{r^2 + (z - ai)^2}. \tag{4.70}$$

Luego, se definen las cantidades auxiliares

$$\mu = R - (z + ai), \quad \mu^* = R^* - (z - ai). \tag{4.71}$$

Así, introduciendo las anteriores expresiones en (4.60), se puede expresar la función ϕ_1, a través de la cantidad μ, como

$$\phi_1 = -\frac{\alpha}{2} \frac{\partial}{\partial a} (\ln \mu + \ln \mu^*). \tag{4.72}$$

Entonces, usando (4.68a) y (4.72), se obtiene para $\Lambda[\phi_1, \psi]$:

$$\Lambda[\phi_1, \psi] = \Lambda\left[\frac{1}{2}\ln\frac{\mu_1}{\mu_2}, -\frac{\alpha}{2}\frac{\partial}{\partial a}(\ln\mu + \ln\mu^*)\right], \tag{4.73}$$

ahora, unos pocos pasos de álgebra elemental dan

$$\begin{aligned} \Lambda[\phi_1, \psi] &= -\frac{\alpha}{4}\frac{\partial}{\partial a}\left\{\ln\left[\frac{(\mu_1-\mu)(\mu_1-\mu^*)}{(\mu_2-\mu)(\mu_2-\mu^*)}\right]\right\} \\ &= \frac{\alpha(1-y)(\lambda_1-\lambda_2)}{2(x^2+y^2)}, \end{aligned} \tag{4.74}$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{ay(1-y)(x^2+1) - mx(1+y)(\zeta-1)(1-\eta)}{[ax+m(1-\zeta-\eta)]^2 + a^2(1-y)^2}, \\ \lambda_2 &= \frac{ay(1-y)(x^2+1) - mx(1+y)(\zeta+1)(1-\eta)}{[ax-m(1+\zeta-\eta)]^2 + a^2(1-y)^2}, \end{aligned}$$

y se ha hecho uso de las propiedades

$$F[\alpha\phi] = \alpha^2 F[\phi], \tag{4.75a}$$

$$F[\alpha\phi_1;\phi_2] = \alpha F[\phi_1;\phi_2], \tag{4.75b}$$

$$F[\phi_1+\phi_2;\phi_3] = F[\phi_1;\phi_3] + F[\phi_2;\phi_3], \tag{4.75c}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}F[\phi_1(a);\phi_2] = F[\frac{\partial}{\partial a}\phi_1;\phi_2] \tag{4.75d}$$

con a un parámetro arbitrario y α una constante.

Así, si se toma ϕ_1, el primer miembro de la familia de discos con borde interno central, se puede superponer este a un agujero negro de Schwarzschild usando (4.74) en (4.58).

De otra parte, se sabe de (4.32), que si es posible obtener el $n+1$-miembro de la familia de discos, ϕ_{n+1}, a través de la fórmula de recurrencia dada por

$$\phi_{n+1}(x, y; a) = \frac{\partial}{\partial a}\phi_n(x, y; a), \tag{4.76}$$

entonces, es posible construir una fórmula de recurrencia para la superposición $\phi_n + \psi$, dado que $\Phi_{n+1} = \phi_{n+1} + \psi$. Consecuentemente, para el otro potencial métrico se tiene que

$$\begin{aligned} \Lambda[\phi_{n+1}+\psi] &= \Lambda[\phi_{n+1}] + \Lambda[\psi] + 2\Lambda[\phi_{n+1}, \psi] \\ &= \Lambda[\frac{\partial}{\partial a}\phi_n] + \Lambda[\psi] + 2\Lambda[\frac{\partial}{\partial a}\phi_n, \psi] \\ &= \frac{\partial}{\partial a}\Lambda[\phi_n] + \Lambda[\psi] + 2\frac{\partial}{\partial a}\Lambda[\phi_n, \psi], \end{aligned} \tag{4.77}$$

donde nuevamente se ha hecho uso de las propiedades (4.75). Así entonces, a partir de la superposición del primer miembro de la familia de funciones métricas $\Lambda[\phi_1 + \psi]$, se puede obtener la superposición correspondiente al n-miembro $\Lambda[\phi_n + \psi]$ a través de derivaciones sucesivas.

De otro lado, se puede probar que la solución para el término mixto de la superposición, $\Lambda[\phi_n, \psi]$, evaluado en $y = \eta = 0$ es $\Lambda[\phi_n, \psi]_{y=\eta=0} = 0$. De igual modo, las derivadas de las funciones métricas $\phi_{n,r}$ y $\psi_{,z}$ se anulan en $y = \eta = 0$. Por consecuencia, la densidad superficial de energía, la presión azimutal y la densidad newtoniana efectiva del sistema superpuesto pueden ser escritos como

$$\varepsilon_n = e^{2\psi - 2\Lambda[\psi]}(1 - r\psi_{,r})\epsilon_n, \qquad (4.78a)$$

$$p_n = r\psi_{,r}e^{2\psi - 2\Lambda[\psi]}\epsilon_n, \qquad (4.78b)$$

$$\rho_n = e^{2\psi - 2\Lambda[\psi]}\epsilon_n, \qquad (4.78c)$$

ó

$$\varepsilon_n = \frac{\zeta(\zeta - 1)}{(\zeta + 1)^2}\epsilon_n, \qquad (4.79a)$$

$$p_n = \frac{\zeta}{(\zeta + 1)^2}\epsilon_n, \qquad (4.79b)$$

$$\rho_n = \frac{\zeta^2}{(\zeta + 1)^2}\epsilon_n, \qquad (4.79c)$$

con $\rho_n = \varepsilon_n + p_n$, siendo

$$\epsilon_n(x) = \frac{4\alpha E_n(x)}{a^{n+1}x^{2n+1}} \exp\left\{-\frac{\alpha^2(2n-2)!B_n(x)}{2^{2n-1}a^{2n}x^{4n}}\right\},$$

donde $x \geq 0$ y los $E_n(x)$ son polinomios positivo definidos de grado $2k$, con $k = (n - 1)/2$ para n impar, y $k = n/2$ para n par; de los cuales los tres primeros tres son expuestos a continuación:

$$E_1(x) = 1,$$

$$E_2(x) = x^2 + 3,$$

$$E_3(x) = 3(3x^2 + 5),$$

mientras que los $B_n(x)$ son polinomios positivo definidos de grado $4k$, con $k = (n-1)/2$ para n impar, y $k = n/2$ para n par; los primeros tres de ellos son dados por

$$B_1(x) = 1,$$

$$B_2(x) = 2x^4 + 8x^2 + 9,$$

$$B_3(x) = 27x^4 + 72x^2 + 50.$$

Ahora, como $\epsilon \geq 0$ y $\zeta \geq 1$, ε y ρ serán siempre positivos. Consecuentemente, el tensor energía-momentum estará en completo acuerdo con las condiciones de energía fuerte y débil. De otra parte, con el fin de satisfacer la condición de energía dominante se requiere que $p \leq \varepsilon$, lo cual implica que $\zeta \geq 2$ y $a \geq \sqrt{3}m$. Además, se tiene que $\rho < \epsilon$, y entonces la masa total del disco en presencia del agujero negro es menor que la masa del disco solo.

El tensor energía-momentum puede ser interpretado como la superposición de dos fluidos contrarrotantes. Con el fin de estudiar esto, se escribe Q^{ab} como [22]

$$Q^{ab} = \varepsilon_+ U^a_+ U^b_+ + \varepsilon_- U^a_- U^b_-, \tag{4.80}$$

donde

$$\varepsilon_+ = \varepsilon_- = \left[\frac{\zeta(\zeta-2)}{(\zeta+1)^2}\right]\frac{\epsilon}{2}, \tag{4.81}$$

son las densidades energía de lso dos fluidos contrarrotantes. Las velocidades de contarrotación son dadas por [22]

$$U^a_\pm = \frac{V^a \pm U W^a}{\sqrt{1-U^2}}, \tag{4.82}$$

donde

$$U^2 = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{1}{\zeta - 1} \leq 1 \tag{4.83}$$

es la velocdad tangencial de contrarrotación. Así, se tienen dos fluidos de polvo con densidades superficiales de energías iguales. Ahora, como $\varepsilon_\pm \geq 0$, los dos discos de polvo están en completo acuerdo con todas las condiciones de energía. Como se puede ver, las soluciones anteriores presentan algunas propiedades interesante. Primero, las fuentes de materia asociadas presentan un comportamiento muy razonable y su tensor energía-momentum está en completo acuerdo con las condiciones de energía. Además, su relativa simplicidad cuando son expresadas en términos de coordenadas esferoidales prolatas y oblatas, permite el fácil estudio de aspectos dinámicos, como por ejemplo el movimiento de las partículas dentro y fuera del disco, la estabilidad de las órbitas y la posible existencia de singularidades.

Ahora, con el fin de mostrar un análisis del comportamiento de las densidades superficial de energía de la superposición, se graficará la densidad superficial de energía adimensional $\tilde{\varepsilon}_n = a\varepsilon_n$ en función de la coordenada radial adimensional $\tilde{r} = r/a$. Así, en la Figura 4.2, Figura 4.3 y en la Figura 4.4 se grafica $\tilde{\varepsilon}_n$ en función de $\tilde{r}$ para los tres primeros miembros de la familia de soluciones correspondientes a la superposición, con $n = 1$, 2 y 3 respectivamente, para diferentes valores de los parámetros m y $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Así, para cada valor de n, se toma $m = \sqrt{3}a/3$, $\sqrt{3}a/6$, y $\sqrt{3}a/9$ y $\tilde{\alpha}_n = 1$, 2,. . . , y 9. La primera gráfica de arriba hacia abajo en Figura 4.2 corresponde a $m = \sqrt{3}a/3$. La primera de las curvas, de arriba hacia abajo, en esta gráfica corresponde $\tilde{\alpha}_1 = 1$, mientras que la última curva, corresponde a $\tilde{\alpha}_9 = 9$. Como se puede ver, en todos los casos la densidad superficial de energía es siempre positiva, con un máximo cerca del borde de los discos, y luego decrece rápidamente conforme $\tilde{r}$ decrece. Se puede ver que, para un valor fijo de n y m, conforme los valores de $\tilde{\alpha}_n$ crecen, el valor del máximo disminuye y se desplaza hacia donde crecen los valores de $\tilde{r}$. De otra parte, para un valor fijo de $\tilde{\alpha}_n$ y m el máximo crece y se desplaza en dirección de crecimiento de $\tilde{r}$, conforme n crece. Mientras que para n y $\tilde{\alpha}_n$ fijos, los máximos crecen como m decrece.

Posteriormente se grafica la presión azimutal $\tilde{p}_n = ap_n$ como función de la coordenada radial adimensional $\tilde{r} = r/a$. Así, en la Figura 4.5, Figura 4.6 y Figura 4.7 se grafica $\tilde{p}_n$ como una función de $\tilde{r}$ para los tres primeros miembros de la familia de la superposición, con $n = 1$, 2 y 3 respectivamente,

para diferentes valores de los parámetros m y $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Así, para cada valor de n, se toma $m = \sqrt{3}a/3$, $\sqrt{3}a/6$, y $\sqrt{3}a/9$ y $\tilde{\alpha}_n = 1, 2, \ldots$, y 9. La primera gráfica de arriba hacia abajo en la Figura 4.5 corresponde a $m = \sqrt{3}a/3$. La primera curva de arriba hacia abajo en esta gráfica corresponde a $\tilde{\alpha}_1 = 1$, mientras que la última en esta misma gráfica corresponde a $\tilde{\alpha}_9 = 9$. Como se puede ver, en todos los casos la presión azimutal es siempre positiva, con un máximo cerca del borde interno de los discos, y luego decrece rápidamente conforme $\tilde{r}$ crece. Se puede notar también que, para valores fijos de n y m, conforme los valores de $\tilde{\alpha}_n$ crecen, los valores máximos de la presión disminuyen y se desplazan en la dirección de crecimiento de $\tilde{r}$. De otra parte, para valores fijos de $\tilde{\alpha}_n$ y m el máximo de la presión decrece y se desplaza en dirección de crecimiento de $\tilde{r}$ conforme n crece. Mientras que para n y $\tilde{\alpha}_n$ y, el máximo decrece conforme m decrece.

Finalmente se grafica la densidad newtoniana efectiva adimensional $\tilde{\rho}_n = a\rho_n$ en función de la coordenada radial adimensional $\tilde{r} = r/a$. Así, en la Figura 4.8, Figura 4.9 y Figura 4.10 se grafica $\tilde{\rho}_n$ en función de $\tilde{r}$ para los tres primeros miembros de la familia de soluciones correspondientes a la superposición, con $n = 1$, 2 y 3 respectivamente, para diferentes valores de los parámetros m y $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Así, para cada valor de n, se toma $m = \sqrt{3}a/3$, $\sqrt{3}a/6$, y $\sqrt{3}a/9$ y $\tilde{\alpha}_n = 1, 2, \ldots$, y 9. La primera gráfica de arriba hacia abajo en Figura 4.8 corresponde a $m = \sqrt{3}a/3$. La primera curva en esta gráfica corresponde a $\tilde{\alpha}_1 = 1$, mientras que la última corresponde a $\tilde{\alpha}_9 = 9$. Como se puede ver, en todos los casos la densidad newtoniana efectiva es siempre positiva, con un máximo cerca del borde interno de los discos y decreciendo rápidamente conforme $\tilde{r}$ crece. También se puede ver que, para un valor fijo de n y m, conforme los valores de $\tilde{\alpha}_n$ crecen, el valor del máximo de la densidad newtoniana disminuyen y se desplazan en la dirección de crecimiento de $\tilde{r}$. Mientras que para n y $\tilde{\alpha}_n$ fijos, el máximo crece como m decrece.

De modo que, se ha presentado un formalismo para superponer discos de polvo con un borde interno central alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. la superposición se obtuvo usando la solución de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a discos de polvo con un borde interno central del trabajo [25]. El formalismo para la superposición fue inspirado en el trabajo de Letelier and Oliveira [56].

Las densidades de energía del sistema superpuesto son siempre funciones positivas de la coordenada radial, igual a cero en el borde interno central del disco, con máximo en un valor finito de los radios y cayendo a cero en el infinito. Los discos tienen masa finita y su tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. Ahora bien, la presión azimutal y la densidad newtoniana efectiva de los discos tienen comportamiento similar al de la densidad de energía, así que el análisis previo es aplicable también a estas cantidades. De otra parte, la velocidad de contrarrotación de las partículas es siempre positiva y menor que la velocidad de la luz, cayendo a cero en el infinito.

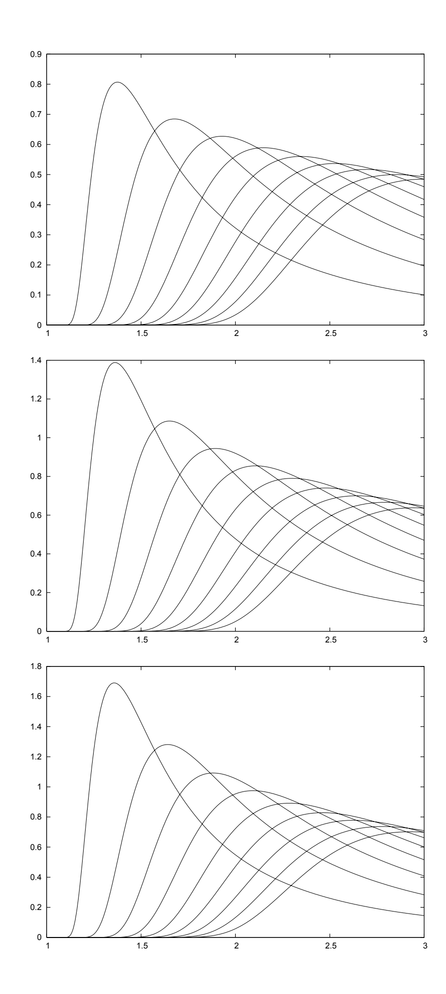


Figura 4.2: Densidad superficial de energía $\tilde{\varepsilon} = a\varepsilon$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el primer modelo de discos, $n = 1$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

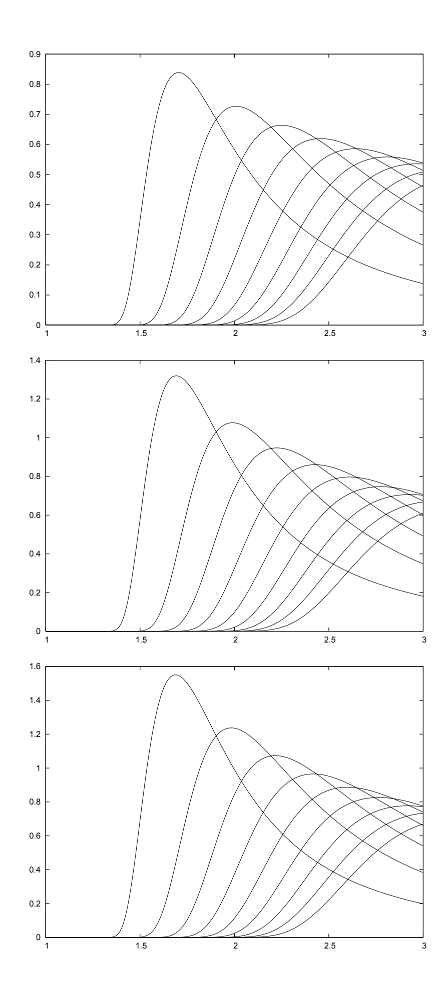


Figura 4.3: Densidad superficial de energía $\tilde{\varepsilon} = a\varepsilon$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el segundo modelo de discos, $n = 2$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

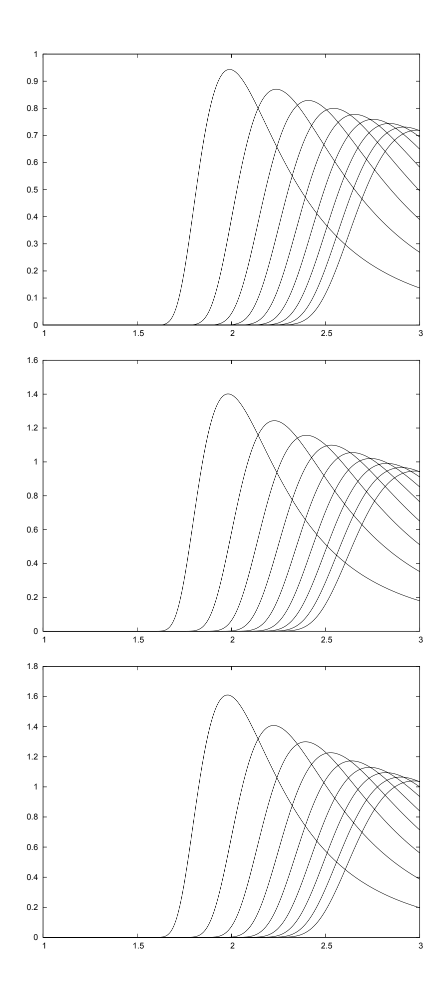


Figura 4.4: Densidad superficial de energía $\tilde{\varepsilon} = a\varepsilon$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el tercer modelo de discos, $n = 3$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

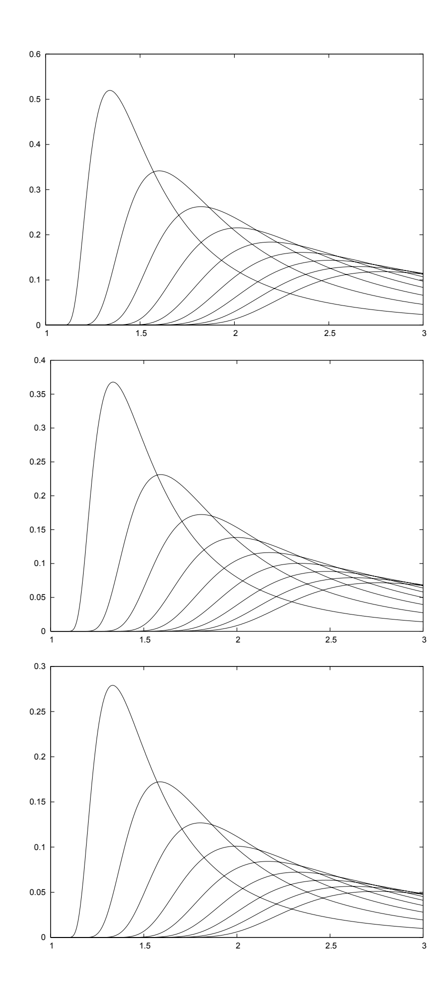


Figura 4.5: Presión azimutal $\tilde{p} = ap$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el primer modelo de discos, $n = 1$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{p}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

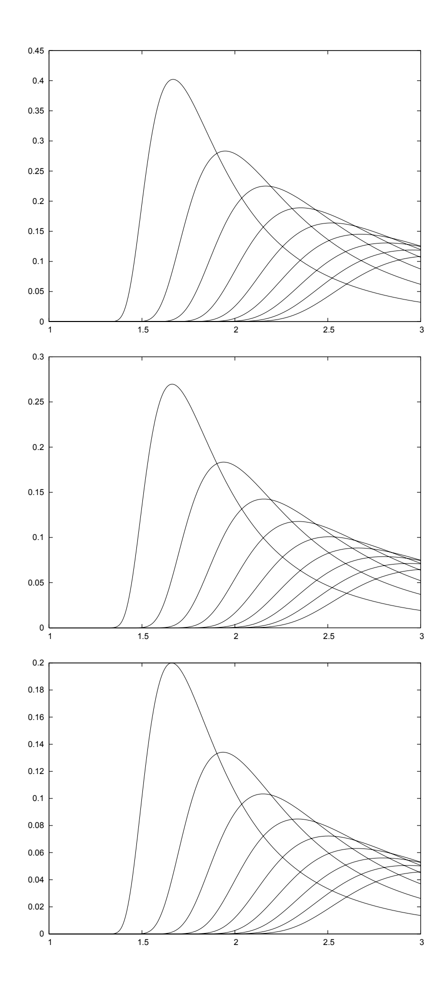


Figura 4.6: Presión azimutal $\tilde{p} = ap$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el segundo modelo de discos, $n = 1$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{p}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

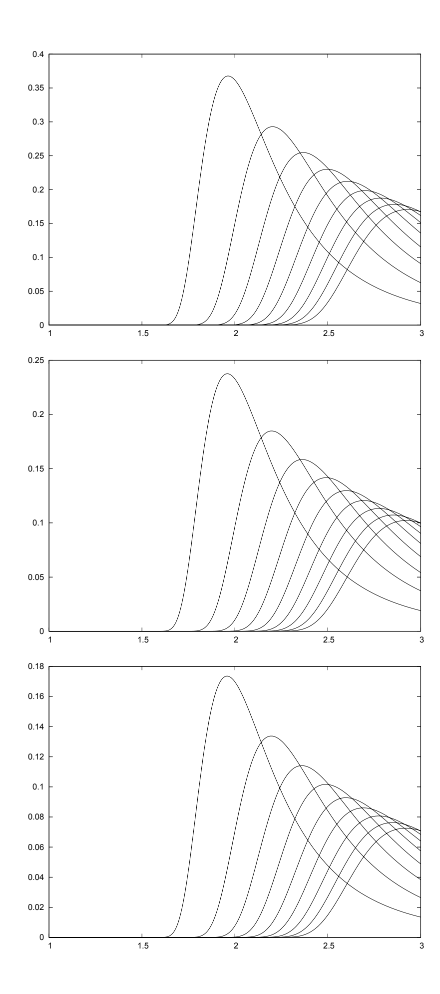


Figura 4.7: Presión azimutal $\tilde{p} = ap$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el tercer modelo de discos, $n = 3$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{p}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

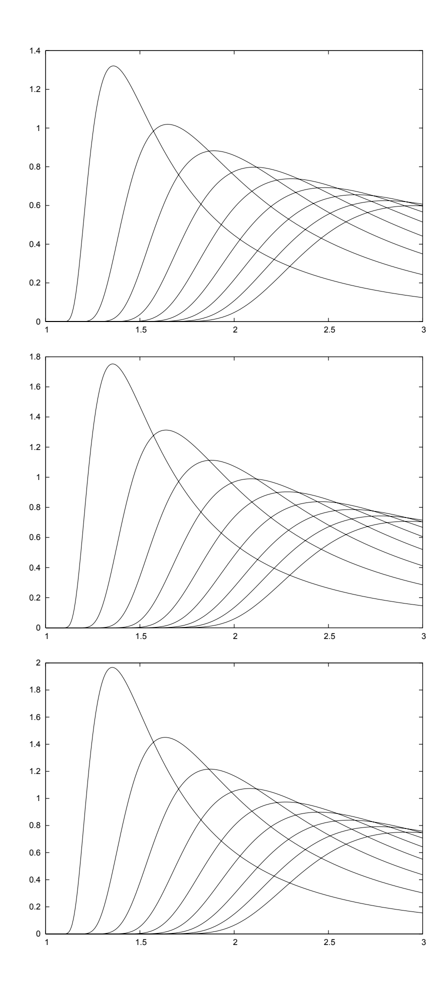


Figura 4.8: Densidad newtoniana efectiva $\tilde{\rho} = a\rho$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el primer modelo de discos, $n = 1$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{\rho}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

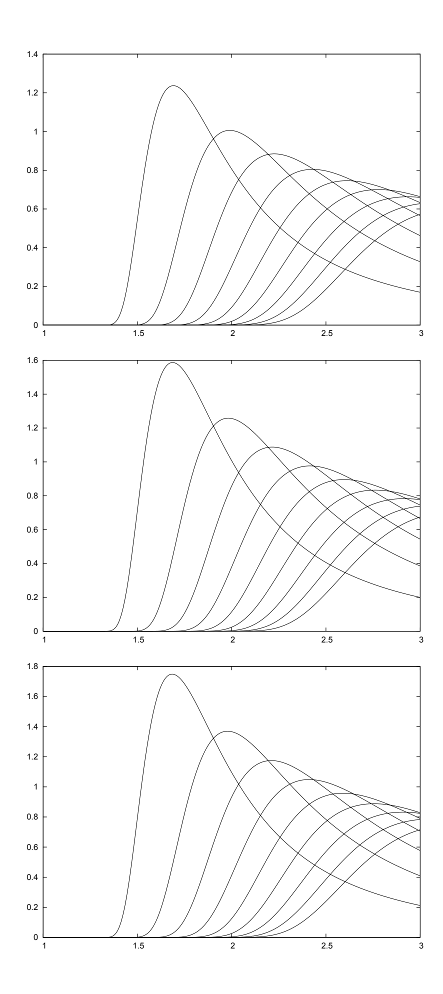


Figura 4.9: Densidad newtoniana efectiva $\tilde{\rho} = a\rho$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el segundo modelo de discos, $n = 2$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{\rho}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

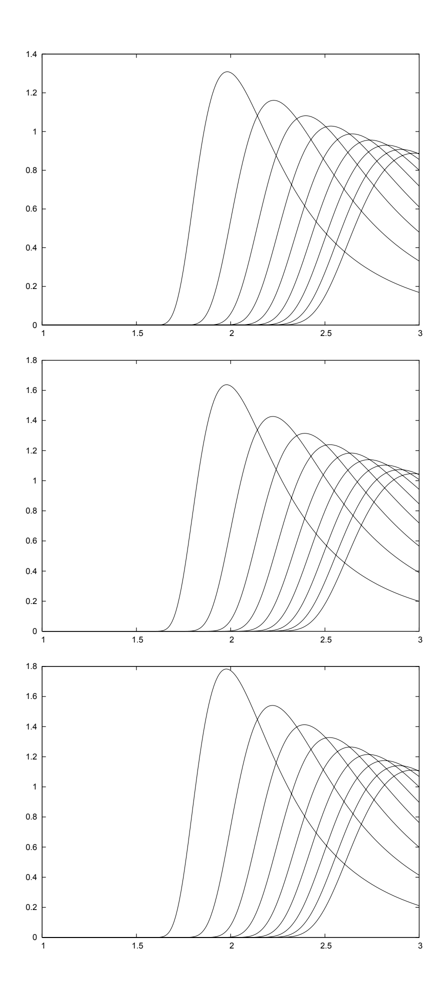


Figura 4.10: Densidad newtoniana efectiva $\tilde{\rho} = a\rho$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el tercer modelo de discos, $n = 3$, con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = \sqrt{3}a/3$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = \sqrt{3}a/6$ y finalmente $\sqrt{3}a/9$. En cada caso se grafica $\tilde{\rho}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, la primera curva para cada valor de m, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2, \ldots$, y $\tilde{\alpha}_9 = 9$.

Capítulo 5

Superposición de Discos de Polvo Contrarrotantes Alrededor de un Agujero Negro de Schwarzschild Cargada

Índice

5.1. Introducción

A continuación se presenta, lo que constituye hasta donde se sabe, la primera familia de soluciones exactas completamente integradas explícitamente de las ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondientes a la superposición de un disco de polvo contrarrotante con un agujero negro. Las soluciones obtenidas representan la superposición cargada de un disco infinito delgado anular (un disco con un borde interno) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La masa total del disco es finita y el tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. Además los estados asintóticos de la superposición cargada se reducen a la superposición sin carga eléctrica descrita en el capítulo anterior. La solución puede interpretarse como la descripción de un disco constituido por fluidos provistos de carga eléctrica contrarrotando alrededor de un agujero negro y que, están también en completo acuerdo con las condiciones de energía.

5.2. Superposición Cargada a través de los Potenciales Complejos de Ernst

Mediante el uso del "método de los potenciales complejos de Ernst [14, 15] ahora se obtendrá una solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espaciotiempo estático axialmente simétrico. Como es bien sabido, soluciones de electrovacío de las ecuaciones de Ernst

$$(\xi\xi^* - \beta^2)\nabla^2\xi = 2\xi^*\nabla\xi \cdot \nabla\xi, \tag{5.1}$$

conducen a soluciones estacioarias, axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell. La constante β se define como $\beta^2 = 1 - \tilde{q}\tilde{q}^*$ con $\tilde{q} = p + iq$, tal que p y q son reales. Asterisco denota complejo conjugado. En el caso particular aquí discutido, un espacio-tiempo estático, $\xi = \xi^*$, las

funciones métricas en (2.5) y el potencial electroagnético pueden obtenerse a partir de los potenciales complejos de Ernst como sigue:

$$e^{2\Phi} = \frac{\xi^2 - \beta^2}{(\xi+1)^2}, \tag{5.2a}$$

$$\Lambda_{,x} = \frac{(1-y^2)\beta^2}{(x^2+y^2)(\xi^2-\beta^2)^2}[\xi_{,x}^2 x(x^2+1) - \xi_{,y}^2 x(1-y^2) - 2y(x^2+1)\xi_{,y}\xi_{,x}], \tag{5.2b}$$

$$\Lambda_{,y} = \frac{(x^2+1)\beta^2}{(x^2+y^2)(\xi^2-\beta^2)^2}[\xi_{,x}^2 y(x^2+1) - \xi_{,y}^2 y(1-y^2) + 2x(1-y^2)\xi_{,y}\xi_{,x}], \tag{5.2c}$$

$$A_{\varphi,x} = \frac{ae^{-2\Phi}(1-y^2)q(\xi+1)^2\xi_{,y}}{(\xi+1)^4}, \tag{5.2d}$$

$$A_{\varphi,y} = -\frac{ae^{-2\Phi}(1+x^2)q(\xi+1)^2\xi_{,x}]}{(\xi+1)^4}, \tag{5.2e}$$

$$A_t = \frac{p}{\xi+1}, \tag{5.2f}$$

donde se ha hecho uso de las coordenadas oblatas $(x, y\,; a)$. Naturalmente, si $\beta = 1$ se tienen soluciones de vacío de las ecuaciones de Ernst. Ahora bien, suponiéndose que se tiene una solución de las ecuaciones de vacío de Ernst ξ_0 entonces la transformación

$$\xi = \beta\xi_0, \tag{5.3}$$

con $\beta^2 \leq 1$ conduce a una solución ξ de las ecuaciones (5.1). Una simple e interesante escogencia de ξ_0 en (5.3) es

$$\xi_0 = -\coth(\phi), \tag{5.4}$$

donde ϕ es una solución de la ecuación de Laplace. Después de la transformación $\xi = -\beta\coth(\phi)$ los potenciales métricos y el potencial eléctrico son

$$e^{\Phi} = -\frac{2\beta e^{\phi}}{e^{2\phi}(1-\beta)-(1+\beta)}, \tag{5.5a}$$

$$\Lambda_{,x} = \frac{(1-y^2)}{(x^2+y^2)}[x(x^2+1)\phi_{,x}^2 - x(1-y^2)\phi_{,y}^2 - 2y(x^2+1)\phi_{,x}\phi_{,y}], \tag{5.5b}$$

$$\Lambda_{,y} = \frac{(x^2+1)}{(x^2+y^2)}[y(x^2+1)\phi_{,x}^2 - y(1-y^2)\phi_{,y}^2 + 2x(1-y^2)\phi_{,x}\phi_{,y}], \tag{5.5c}$$

$$A_t = \frac{\sqrt{1-\beta^2}(e^{2\phi}-1)}{e^{2\phi}(1-\beta)-(1+\beta)}. \tag{5.5d}$$

Ahora bien, si en (5.4) se usa como solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío correspondiente a la superposición de un disco con borde interno central alrededor de un agujero negro de Schwarzschild estudiada en el capítulo anterior $(\Phi_n, \Lambda[\Phi_n])$

$$\phi \to \Phi_n = \phi_n + \psi, \tag{5.6}$$

la solución correspondiente a las ecuaciones de Ernst (5.3) conduce a una solución de las ecuaciones de Einstein-Maxwell ($\Phi_n^c, \Lambda_n^c[\Phi_n^c], A_t$) dadas por

$$e^{\Phi_n^c} = -\frac{2\beta e^{\Phi_n}}{e^{2\Phi_n}(1-\beta)-(1+\beta)}, \tag{5.7a}$$

$$\Lambda_n^c\left[\Phi_n^c\right] = \Lambda_n\left[\Phi_n\right], \tag{5.7b}$$

$$A_t = \frac{\sqrt{1-\beta^2}(e^{2\Phi_n}-1)}{e^{2\Phi_n}(1-\beta)-(1+\beta)}, \tag{5.7c}$$

interpretable como la superposición de un disco con borde interno central alrededor de un agujero negro de Schwarzschild cargada. Ahora bien, usando la tétrada ortonormal (2.35) se pueden escribir el tensor energía-momentum Q_{ab} en la forma canónica como

$$Q_{ab} = \varepsilon^c V_a V_b + p^c W_a W_b, \tag{5.8}$$

donde ϵ^c y p^c son, respectivamente la densidad de energía y la presión del disco y el superíndice "c" denota que corresponde a la superposición cargada. En términos de estas cantidades se puede escribir

$$\varepsilon_n^c = 4e^{2(\Phi_n^c-\Lambda_c^n[\Phi_n^c])}\left[1-r\Phi_{n,r}^c\right]\Phi_{n,z}^c, \tag{5.9a}$$

$$p_n^c = 4e^{2(\Phi_n^c-\Lambda_c^n[\Phi_n^c])} r\Phi_{n,r}^c\Phi_{n,z}^c, \tag{5.9b}$$

donde, como arriba, todas las cantidades son evaluadas en $z=0^+$. En términos de esta misma tétrada, como se sabe del (Capítulo 2), la densidad superficial de corriente en el disco, $I^a = [F^{az}]$, se puede escribir en la forma canónica como

$$I_a = \sigma V_a + jW_a. \tag{5.10}$$

Así, explícitamente, la densidad de energía, la presión azimuthal la densidad newtoniana efectiva y la densidad de carga eléctica son, respectivamente:

$$\varepsilon_n^c = \frac{\beta^3\zeta(\zeta^2-1)(\zeta+\beta)}{(\beta\zeta+1)^4}\epsilon_n, \tag{5.11a}$$

$$p_n^c = \frac{\beta^2\zeta(\zeta+\beta)^2}{(\beta\zeta+1)^4}\epsilon_n, \tag{5.11b}$$

$$\rho_n^c = \frac{\beta^2\zeta^2(\zeta+\beta)}{(\beta\zeta+1)^3}\epsilon_n, \tag{5.11c}$$

$$\sigma_n = -\frac{(1-\beta^2)^{1/2}\beta^2\zeta^2(\zeta^2-1)^{1/2}}{2(\beta\zeta+1)^3}\epsilon_n, \tag{5.11d}$$

con $\rho_n^c = \varepsilon_n^c + p_n^c$, siendo

$$\epsilon_n(x) = \frac{4\alpha E_n(x)}{a^{n+1}x^{2n+1}}\exp\left\{-\frac{\alpha^2(2n-2)!B_n(x)}{2^{2n-1}a^{2n}x^{4n}}\right\}.$$

Cuando $\beta = 1$ las expresiones anteriores se reducen, como debe ser, a las expresiones (4.79); las correspondientes a la densidad de energía, la presión y densidad newtoniana efectiva de la superposición en ausencia de carga eléctrica. Ahora, como $\epsilon \geq 0$ y $\zeta \geq 1$, ε^c y ρ^c serán siempre positivos. Consecuentemente, el tensor energía-momentum estará en completo acuerdo con las condiciones de energía fuerte y débil. De otra parte, con el fin de satisfacer la condición de energía dominante se requiere que $p^c \leq \varepsilon^c$, lo cual implica que $\zeta \geq (1 + \sqrt{1+8\beta^2})/(2\beta)$ y que el radio del borde interno $a \geq m(4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2)^{1/2}/(2\beta)$.

El tensor energía-momentum puede ser interpretado como la superposición de dos fluidos cargados contrarrotantes. En orden a estudiar esto, se escribe Q^{ab} como [22]

$$Q^{ab} = \varepsilon^c_+ U^a_+ U^b_+ + \varepsilon^c_- U^a_- U^b_-, \tag{5.12}$$

donde

$$\varepsilon^c_+ = \varepsilon^c_- = \left[\frac{\beta^2\zeta(\zeta+\beta)(\beta\zeta^2 - \zeta - 2\beta)}{(\beta\zeta+1)^4}\right]\frac{\epsilon}{2}, \tag{5.13}$$

son las densidades energía de los dos fluidos contrarrotantes. Las velocidades de contarrotación son dadas por [22]

$$U^a_\pm = \frac{V^a \pm UW^a}{\sqrt{1-U^2}}, \tag{5.14}$$

donde

$$U^2 = \frac{p}{\varepsilon} = \frac{(\zeta+\beta)}{\beta(\zeta^2-1)} \leq 1 \tag{5.15}$$

es la velocidad tangencial de contrarrotación. Así, se tienen dos fluidos de polvo con densidades superficiales de energías iguales. Ahora, como $\varepsilon_\pm \geq 0$, los dos discos de polvo están en completo acuerdo con todas las condiciones de energía.

Ahora, con el fin de mostrar un análisis del comportamiento de las densidades superficial de energía de la superposición, se graficará la densidad superficial de energía adimensional $\tilde{\varepsilon}_n = a\varepsilon_n$ en función de la coordenada radial adimensional $\tilde{r} = r/a$. Así, en la Figura 5.1, Figura 5.2 y en la Figura 5.3 se grafíca $\tilde{\varepsilon}_n$ en función de $\tilde{r}$ para los tres primeros miembros de la familia de soluciones correspondientes a la superposición, con $n = 1, 2$ y 3 respectivamente, para diferentes valores de los parámetros m y $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Así, para cada valor de n, se toma $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, . . . , 0.9 y, finalmente, $\beta = 1$, el caso vacío, la curva con menor máximo en cada gráfica. Como se puede ver, el comportamiento de la densidad superficial de energía correspondiente a la superposición cargada es similar al comportamiento de la densidad de la superposición sin carga. Es decir, en todos los casos la densidad superficial de energía es siempre positiva, con un máximo cerca del borde de los discos, y luego decrece rápidamente conforme $\tilde{r}$ decrece. Se puede ver que, para un valor fijo de n y m, conforme los valores de $\tilde{\alpha}_n$ crecen, el valor del máximo disminuye y se desplaza hacia donde crecen los valores de $\tilde{r}$. De otra parte, para un

valor fijo de $\tilde{\alpha}_n$ y m el máximo crece y se desplaza en dirección de crecimiento de $\tilde{r}$, conforme n crece. Mientras que para n y $\tilde{\alpha}_n$ fijos, los máximos crecen como m decrece. Ahora, a medida que la carga eléctrica aumenta, β disminuye, el máximo de la función aumenta, describiendo el comportamiento asintótico, solución de vacío, cuando $\beta = 1$. En la Figura 5.1, Figura 5.2 y en la Figura 5.3 se grafíca la densidad de carga eléctrica $-\tilde{\sigma}_n$, como se puede ver su comportamiento es similar al de la densidad de energía, por tanto toda la descripción anterior es también valida para la densidad de carga eléctrica.

Las soluciones obtenidas representan la superposición cargada de un disco infinito delgado anular alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La masa total del disco es finita y el tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. Además los estados asintóticos de la superposición cargada se reducen a la superposición sin carga eléctrica descrita en el capítulo anterior. La solución puede interpretarse como la descripción de un disco constituido por fluidos provistos de carga eléctrica contrarrotando alrededor de un agujero negro y que, están también en completo acuerdo con las condiciones de energía.

Las soluciones anteriores presentan algunas propiedades interesantes. Primero, las fuentes de material asociado presenta un comportamiento muy razonable y su tensor energía-momentum está en completo acuerdo con las condiciones de energía. Además, su relativa simplicidad cuando son expresadas en términos de coordenadas esferoidales prolatas y oblatas, permite el fácil estudio de aspectos dinámicos, como por ejemplo el movimiento de las partículas cargadas dentro y fuera del disco, la estabilidad de las órbitas y la posible existencia de singularidades.

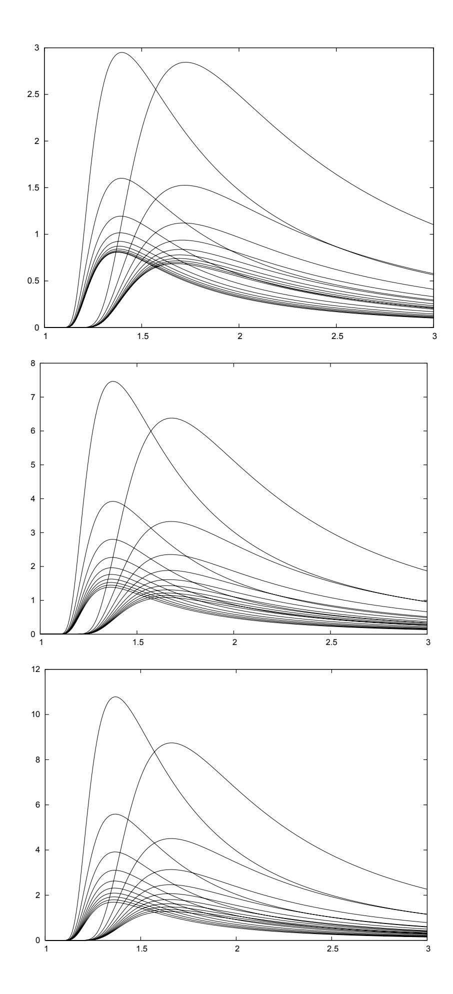


Figura 5.1: Densidad superficial de energía $\tilde{\varepsilon} = a\varepsilon$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el primer modelo, $n = 1$, de la superposición cargada de discos con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, . . . , 0.9 y, finalmente, $\beta = 1$, el caso vacío, la curva con menor amplitud en cada gráfica.

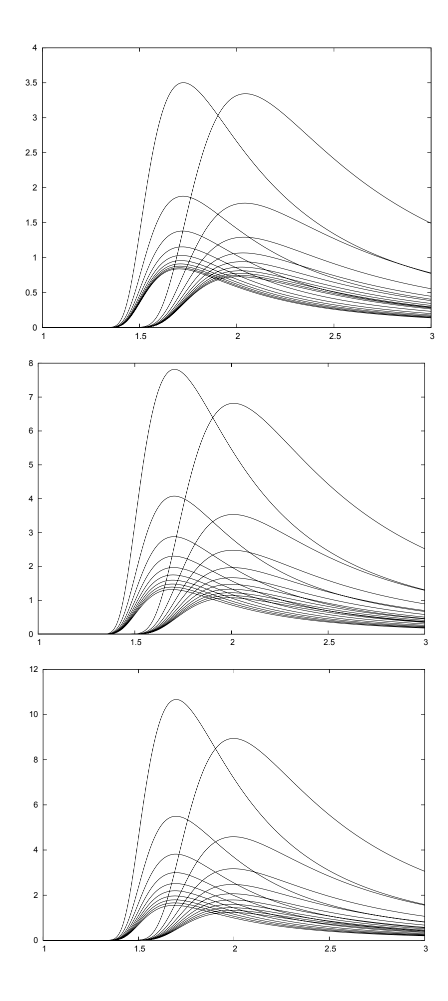


Figura 5.2: Densidad superficial de energía $\tilde{\varepsilon} = a\varepsilon$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el segundo modelo, $n = 2$, de la superposición cargada de discos con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, ..., 0.9 y, finalmente, $\beta = 1$, el caso vacío, la curva con menor amplitud en cada gráfica.

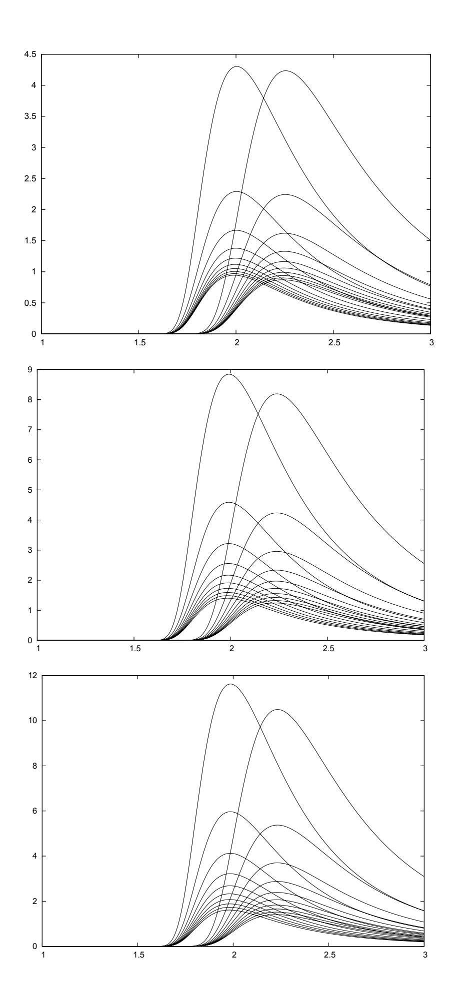


Figura 5.3: Densidad superficial de energía $\tilde{\varepsilon} = a\varepsilon$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el tercer modelo, $n = 3$, de la superposición cargada de discos con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\varepsilon}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, . . . , 0.9 y, finalmente, $\beta = 1$, el caso vacío, la curva con menor máximo en cada gráfica.

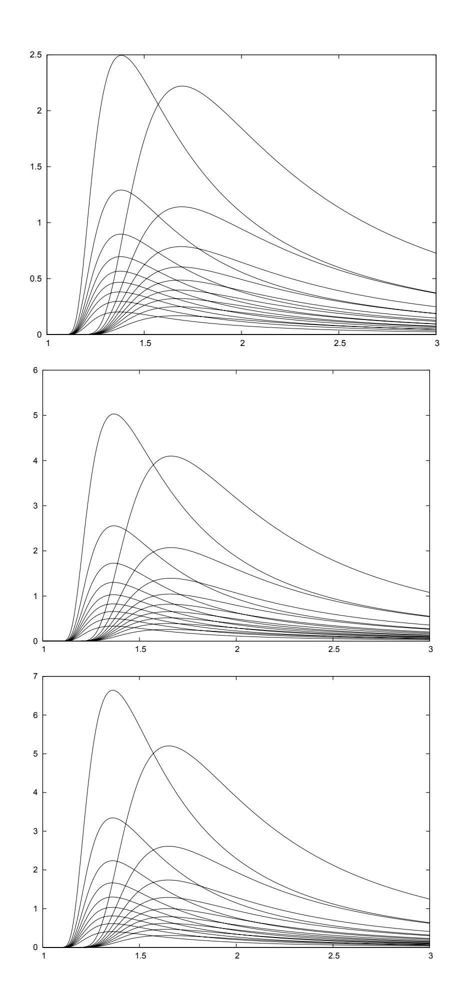


Figura 5.4: Densidad superficial de carga $-\tilde{\sigma} = -a\sigma$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el primer modelo, $n = 1$, de la superposición cargada de discos con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\sigma}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, . . . , 0.8 y, finalmente, $\beta = 0.9$, la curva con menor máximo en cada gráfica.

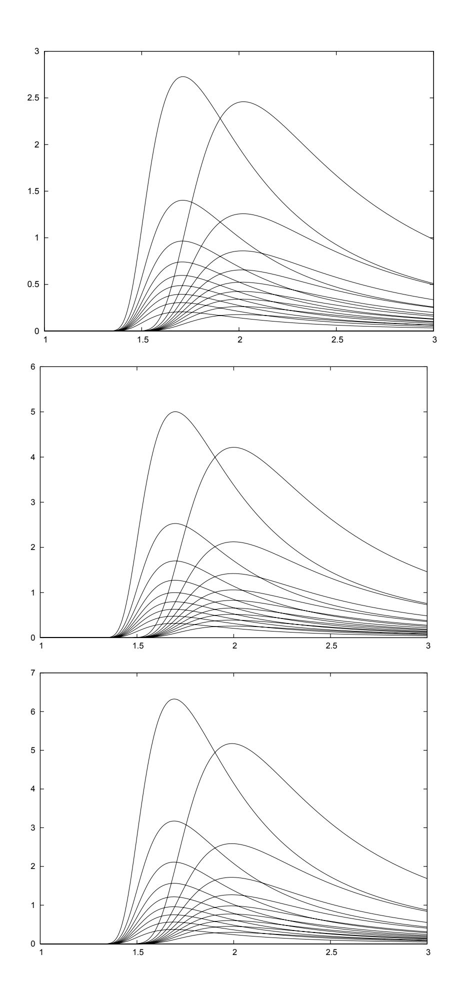


Figura 5.5: Densidad superficial de carga $-\tilde{\sigma} = -a\sigma$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el segundo modelo, $n = 2$, de la superposición cargada de discos con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1+8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\sigma}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, ..., 0.8 y, finalmente, $\beta = 0.9$, la curva con menor máximo en cada gráfica.

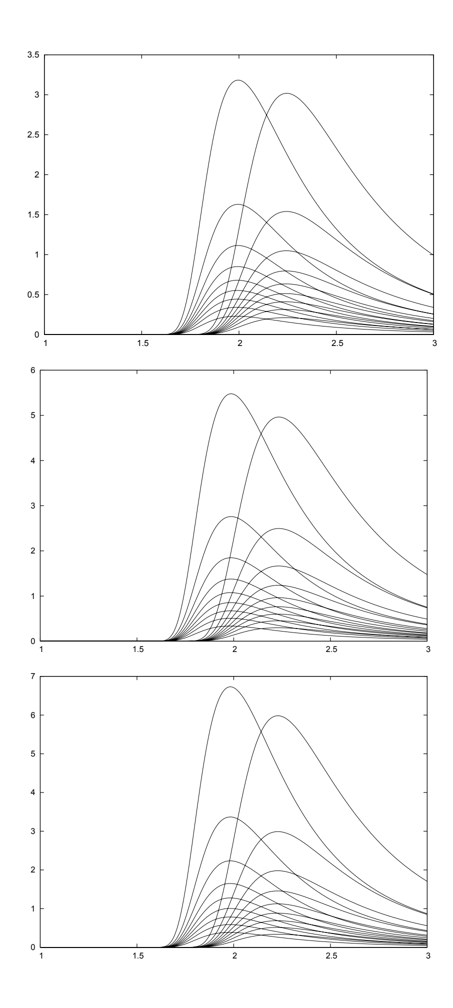


Figura 5.6: Densidad superficial de carga $-\tilde{\sigma} = -a\sigma$ en función de $\tilde{r} = r/a$ para el tercer modelo, $n = 3$, de la superposición cargada de discos con borde interno central de radio a alrededor de un agujero negro de masa $m = 2a\beta/[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, primera figura de arriba hacia abajo, luego $m = 2a\beta/2[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$, y finalmente $m = 2a\beta/3[4\beta^2 + 2\sqrt{1 + 8\beta^2} + 2]^{1/2}$. En cada caso se grafica $\tilde{\sigma}(\tilde{r})$ para $1 \leq \tilde{r} \leq 3$ con diferentes valores del parámetro $\tilde{\alpha}_n = \alpha/a^n$. Primero se toma $\tilde{\alpha}_1 = 1$, curvas próximas al borde del disco, luego $\tilde{\alpha}_2 = 2$. Para cada valor de $\tilde{\alpha}$ se toman diferentes valores de β: 0.1, 0.2, . . . , 0.8 y, finalmente, $\beta = 0.9$, la curva con menor máximo en cada gráfica.

Capítulo 6

Conclusiones Generales

Se presentó un análisis detallado del tensor energía-momentum de un disco delgado estacionario axialmente simétrico. Se consideró el modelo más general de discos delgado con esfuerzo radial y presión radial diferentes de cero. Así, en este trabajo de investigación se presenta por primera vez el análisis completo de todos los posibles casos de tensor energía-momentum que pueden obtenerse a partir de soluciones estacionarias axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío.

Se expresó el tensor energía-momentum superficial (SEMT) en términos de la tétrada LSO y así se obtuvieron expresiones explícitas para las variables dinámicas que caracterizan el SEMT. Esto es, expresiones para el vector velocidad de los discos, así como para la densidad superficial de energía, esfuerzos principales y función flujo de calor que son válidas para toda clase de discos. De igual modo se presentó explícitamente una expresión para la densidad superficial de corriente. Las expresiones obtenidas aquí, son entonces la generalización de las correspondiente expresiones para los casos estáticos que fueron presentados en [22] y también generaliza los resultados obtenidos en [29] para discos delgados estacionarios.

También se presentó la generalización estacionaria del Modelo de Contrarrotación (CRM), el cual fue desarrollado previamente sólo para el caso estático en [22, 21]. Así entonces, ahora es posíble obtener expresiones explícitas para todas las cantidades pertinentes al CRM presentes cuando existe flujo de calor y para esfuerzos principales arbitrarios. Se consideraron velocidades de contrarrotación iguales y opuestas y contrarrotación a lo largo de electrogeodésicas.

Se obtuvo una ligadura general sobre las velocidades de contrarrotación, necesaria para expresar el tensor energía-momentum de los discos como la superposición de dos fluidos perfectos contrarrotantes. La ligadura obtenida es la generalización de la obtenida en [29], para discos sin presión radial y sin flujo de calor, donde sólo se consideró fluidos contrarrotantes circulando a lo largo de geodésicas.

Se encontró también que, en general, no existe posibilidad de tomar las dos velocidades tangenciales de contrarrotación iguales y opuestas ni suponer que los fluidos circulen a lo largo de geodésicas (o electrogeodésicas). Entonces, para discos construidos a partir de métricas estacionarias axialmente simétricas, las velocidades de contrarrotación no están determinadas de manera única y existe la libertad que pueda ser usado para obtenerse diferentes modelos de contrarrotación para el mismo disco. El desarrollo teórico que condujo a estos resultado constituye el fundamento central del trabajo [27].

Se presentó una familia infinita de discos de polvo cargado axialmente simétricos de extensión finita con densidades superficiales de energía y carga bien comportadas. Los discos fueron obtenidos a partir de soluciones de las ecuaciones de Einstein-Maxwell para un espacio-tiempo conformestático. Con el fin de obtener las soluciones, se supuso una dependencia funcional entre el potencial eléctrico y el potencial gravitacional y, entre esta y una función auxiliar. Las soluciones fueron expresadas entonces en términos de una solución de la ecuación de Laplace correspondiente a la familia de bien comportados discos newtonianos delgados de radios finitos, los discos generalizados de Kalnajs [30].

Estos discos delgados tienen una densidad de carga que es igual, salvo por un signo, a su densidad de energía, y así constituyen un ejemplo de los comúnmente llamados configuraciones de equilibrio de “polvo eléctricamente contrapuesto". La densidad es siempre positiva y bien comportada, anulándose en el borde del disco. Además, conforme el valor de m crece, la densidad de energía se concentra más en el centro de los discos, presentando un máximo en $r = 0$ para todos los valores de $|\tilde{k}|$. Sin embargo, para los primeros dos modelos con $m = 1$ y $m = 2$, para valores pequeños de $|\tilde{k}|$ la densidad de energía presenta un máximo cerca al borde del disco mientras que para valores grandes de $|\tilde{k}|$ el máximo se encuentra en el centro del disco. Además, como la densidad de energía de los discos es siempre positiva y los discos están hechos de polvo , todos los modelos están en completo acuerdo con todas las condiciones de energía. Un hecho de particular relevancia en el estudio de modelos de discos relativistas. En efecto, como ya fue mencionado, muchos de los modelos de discos relativistas delgados que han sido estudiados en la literatura no están en completo acuerdo con estas condiciones.

De otra parte, como se puede ver de las ecuaciones en Sec. 3.2, el procedimiento aquí presentado puede ser aplicado no sólo a espaciotiempos conformestáticos sino que también puede ser usado para obtener soluciones no axialmente simétricas de las ecuaciones de Einstein-Maxwell en el vacío. Por consecuencia, estos modelos de discos delgados aquí presentados se pueden generalizar considerando para la función auxiliar U soluciones de la ecuación de Laplace sin la imposición previa de simetría axial. Así, se está trabajando en esta dirección y los resultados se presentarán en un próximo trabajo. Análogamnete, la generalización a espaciotiempos conformestacionarios con campos magnéticos está en consideración.

Se presentó una familia infinita de soluciones de las ecuaciones Einstein en el vacío asitóticamente planas y regulares en todas partes. Estas soluciones describen una familia infinita de discos delgados con un borde interno central constituidos por materia de polvo, cuya densidad de energía es siempre positiva y bien comportada, de tal modo que su tensor energía-momentum está en completo acuerdo con todas las condiciones de energía. Además, aunque los discos son de extensión infinita, todos tienen masa finita. Ahora, como las funciones métricas de las soluciones se calcularon explícitamente, estas constituyen la primera familia de soluciones exactas explícitas completamente integradas para tal clase de fuentes de discos delgados. Además, su relativa simplicidad cuando son expresadas en coordenadas esferoidales oblatas, permite estudiar muy fácilmente sus diferentes aspectos dinámicos, como el movimiento de partículas dentro y fuera de los discos y la estabilidad de las órbitas.

Además de su importancia como una nueva familia de soluciones exactas y soluciones explícitas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, la principal importancia de esta familia de soluciones es que puede ser fácilmente superpuesta con la solución de Schwarzschild con el fin de obtener la descripción de un sistema binario compuesto por un disco delgado alrededor de un agujero negro central. En efecto, la superposición del primer miembro de esta familia con un agujero negro de Swarzschild fue obtenida y presentada en [31].

Ahora, como en la teoría newtoniana, el potencial gravitacional está dado por la solución del problema de valores en la frontera para la ecuación de Laplace, se puede considerar $\Phi_n(r, z; a)$ como una familia de potenciales gravitacionales newtonianos de fuentes discoidales con borde interno, cuya densidad de masa newtoniana están dada por

$$\sigma_n(x) = \frac{2\alpha E_n(x)}{a^{n+1} x^{2n+1}}, \tag{6.1}$$

claramente divergente en el borde de los discos. Por consecuencia, se puede concluir que no existen

soluciones en la teoría newtoniana que describan el campo gravitacional de un disco delgado con borde interno, mientras que esta clase de fuentes puede ser propiamente descrita por medio soluciones regulares y asintóticamente planas, en el marco de la teoría de la gravitación ofrecida por la relatividad general. Los fundamentos básicos necesarios para la obtención de esta clase de soluciones fueron presentadas en el trabajo [25].

Se presentó también un formalismo para superponer discos de polvo con un borde interno central alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La superposición se obtuvo usando la solución de las ecuaciones de campo de Einstein correspondientes a discos de polvo con un borde interno central del trabajo [25]. El formalismo para la superposición fue inspirado en el trabajo de Letelier and Oliveira [56]. Las densidades de energía del sistema superpuesto son siempre funciones positivas de la coordenada radial, igual a cero en el borde interno central del disco, con máximo en un valor finito de los radios y cayendo a cero en el infinito. Los discos tienen masa finita y su tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. La presión azimutal y la densidad newtoniana efectiva de los discos tienen comportamiento similar al de la densidad de energía, así que el análisis previo es aplicable también a estas cantidades. De otra parte, la velocidad de contrarrotación de las partículas es siempre positiva y menor que la velocidad de la luz, cayendo a cero en el infinito. La masa del disco cuando el agujero negro está presente es menor que la masa total del disco solo.

Finalmente, se presentó, lo que constituye hasta donde se sabe, la primera familia de soluciones exactas completamente integradas explícitamente de las ecuaciones de Einstein-Maxwell correspondientes a la superposición de un disco de polvo contrarrotante con un agujero negro. Las soluciones obtenidas representan la superposición cargada de un disco infinito delgado anular (un disco con un borde interno) alrededor de un agujero negro de Schwarzschild. La masa total del disco es finita y el tensor energía-momentum está de acuerdo con todas las condiciones de energía. Además los estados asimptóticos de la superposición cargada se reducen a la superposicón de sin carga eléctrica. La solución puede interpretarse como la descripción de un disco constituido por fluidos provistos de carga eléctrica contrarrotando alrededor de un agujero negro y que, están también en completo acuerdo con las condiciones de energía.

Como se puede ver, las soluciones anteriores presentan algunas propiedades interesante. Primero, las fuentes de material asociado presenta un comportamiento muy razonable y su tensor energía-momentum está en completo acuerdo con las condiciones de energía. Además, su relativa simplicidad cuando son expresadas en términos de coordenadas esferoidales prolatas y oblatas, permite el fácil estudio de aspectos dinámicos, como por ejemplo el movimiento de las partículas dentro y fuera del disco, la estabilidad de las órbitas y la posible existencia de singularidades. Ahora bien, aunque el formalismo de los potenciales complejos de Ernst fue usado aquí para obtenerse la superposición cargada, también puede ser usada para generar una superposición magnetizada y además una cargada y magnetizada. Resultados sobre este particular se presentarán en un próximo trabajo.

Los principales resultados obtenidos en el marco del desarrollo del presente trabajo de investigación, así como trabajos en curso, nacidos desta misma investigación, se listan a continuación:

1. *An Infinite Family of Magnetized Morgan-Morgan Relativistic Thin Disks [34]*,

2. *An infinite family of relativistic magnetized finite thin disks [35]*,

3. *Stationary Axially Symmetric Relativistic Thin Disks [26]*,

4. *Charged and Electromagnetized Morgan-Morgan-Type Disks [36]* ,

5. *Modelos Relativistas de Discos Delgados Finitos No Axialmente Simétricos con Campo Eléctrico*, Presentación Oral en *Segunda Reunión Colombo-Venezolana de Relatividad y Gravitación, Armenia, Colombia 28 al 31 de Octubre de 2007*,

6. *Discos de Morgan-Morgan Cargados y Electromagnetizados*, Presentado en Calidad de Poster en el *Tercer Taller de Gravitación y Astrofísica Relativista, Homenaje a Luis Herrera-60 Aniversario, Isla de Coche, Venezuela 8 al 11 de Noviembre de 2006*,

7. *Finite Axisymmetric Charged Dust Disks Sources for Conformastatic Spacetimes [23]*,

8. *Relativistic Static Thin Dust Disks with an Inner Edge: An infinite Family of New Exact Solutions [25]*,

9. *Finite Axisymmetric Charged Dust Disks in Conformastatic Spacetimes*, *Physical Review D [27]*,

10. *Exact Static Axially Symmetric Thin Annular Dust Disks [24]*,

11. *Electrovacuum Static Axially Symmetric Thin Annular Dust Disks*, Presentado en Calidad de Poster en *II Congreso latinoamericano de Física, 20 al 24 de Octubre, Zacatecas, México*,

12. *Counterrotating Dust Disk Around a Schwarzschild Black Hole: New Fully Integrated Explicit Exact Solution [31]*,

13. *A Family of Relativistic Charged Thin Disks with an Inner Edge [66]*,

14. *Counterrotating Charged Dust Disk Around a Schwarzschild Black Hole: New Fully Integrated Explicit Exact Solution [65]*,

Los tópicos aquí estudiados también sirvieron como punto de partida para los trabajos de grado:

1. Trabajo de Grado Para Optar el Título de Maestría en Física *Construcción de Modelos Relativistas de Discos Delgados Mediante Soluciones Conformestáticas de las Ecuaciones de Einstein-Maxwell*, cuya calificación obtenida fue *meritoria*.

2. Trabajo de Grado Para Optar el Título de Físico *Modelos Relativistas de Discos de Polvo axialmente Simétricos con Borde Interno*,

codirigidas por los autores del presente trabajo de investigación.

Apéndice A

La Ecuación Dinámica y la Ecuación de la Electrogeodésica

A.1. La Ecuación Dinámica

En este apéndice se obtiene una "ecuación dinámica" asociada a los campos gravitacional y electromagnético debido a fuentes concentradas en la hipersuperficie discoidal. El punto de partida es la ley de conservación

$$T^{ab}{}_{;\,b} = 0, \tag{A.1}$$

con

$$\begin{aligned} T^{ab} &= Q^{ab}\delta(\phi) + (T^{ab}_{EM})^D, && \text{(A.2a)}\\ T^{ab}_{EM} &= T^{\;ab}_{EM}|_{z^+}\Theta(\phi) + T^{\;ab}_{EM}|_{z^-}(1-\Theta(\phi)), && \text{(A.2b)} \end{aligned}$$

donde $\Theta(\phi)$ denota la función de Heaviside con $\Theta(\phi = 0) = \frac{1}{2}$.

Sustituyendo el tensor energía-momentum (A.2) en la ecuación de conservación (A.1), se tiene que la derivada covariante de T_{ab} es

$$T^{ab}{}_{;\,b} = (Q^{ab}\delta(\phi))_{;\,b} + \left\{T^{\;ab}_{EM}|_{z^+}\Theta(\phi) + T^{\;ab}_{EM}|_{z^-}(1-\Theta(\phi))\right\}_{;b}. \tag{A.3}$$

Ahora bien

$$T^{\;ab}_{EM}|_{z^+\;;b} = T^{\;ab}_{EM}|_{z^-\;;b} = 0,$$

de donde se deduce que

$$T^{ab}{}_{;b} = \left(Q^{ab}\delta(\phi)\right)_{;b} + \left[T^{ab}_{EM}\right]\phi_{,b}\delta(\phi). \tag{A.4}$$

El primer término del lado derecho de esta ecuación es

$$(Q^{ab}\delta(\phi))_{;b} = Q^{ab}{}_{;b}\delta(\phi) + Q^{ab}\delta'(\phi)\phi_{,b}, \tag{A.5}$$

Entoces, las ecuaciones (A.1) con

$$T^{ab}{}_{;b} = \left\{Q^{ab}{}_{;b} + \left[T^{ab}_{EM}\right]\phi_{,b}\right\}\delta(\phi) + Q^{ab}\phi_{,b}\delta'(\phi) = 0, \tag{A.6}$$

Así se tiene que

$$\begin{aligned} Q^{ab}\phi_{,b} &= 0, && \text{(A.7a)}\\ Q^{ab}{}_{;b} &+ \left[T^{ab}_{EM}\right]\phi_{,b} = 0. && \text{(A.7b)} \end{aligned}$$

Por lo que se puede obtener

$$Q^{ab}{}_{;b} \quad + \quad \left[T^{az}_{EM}\right] = 0, \tag{A.8}$$

donde se han usado la definición de los vectores normales a la superficie $\phi_b = \delta^z_b$. De otra parte, se sabe que

$$T^{az}_{EM} = F^a{}_c F^{zc} - \frac{1}{4} g^{az} F_{cd} F^{cd} \tag{A.9}$$

entonces se tiene que el salto en el tensor energía-momentum correspondiente al tensor electromagnético a través de la superficie del disco es

$$\left[T^{az}_{EM}\right] = [F^a{}_c]\, F^{zc} + F^a{}_c\, [F^{zc}] - \frac{1}{4} g^{az} \left\{F_{cd}\left[F^{cd}\right] + [F_{cd}]\, F^{cd}\right\}. \tag{A.10}$$

o, equivalentemente,

$$[T^{EM}{}^z_a] = [F_{ac}]\, F^{zc} + F_{ac}\, [F^{zc}] - \frac{1}{4} \delta^z_a \left\{[F_{cd}]\, F^{cd} + F_{cd}\left[F^{cd}\right]\right\}. \tag{A.11}$$

Ahora, debido a la propiedad $F_{cd}\left[F^{cd}\right] = [F_{cd}]\, F^{cd}$ se tiene

$$[T^{EM}{}^z_a] = [F_{ac}]\, F^{zc} + F_{ac}\, [F^{zc}] - \frac{1}{2} \delta^z_a F^{cd}\, [F_{cd}]\,. \tag{A.12}$$

Es muy fácil darse cuenta que $F^{zc}\,[F_{ac}] = \delta^z_a F^{zc}\,[A_{c,z}]$ y que $[F_{cd}]\, F^{cd} = 2F^{zc}\,[A_{c,z}]$. Así, se obtiene finalmente que para el salto del tensor electromagnético

$$[T^{EM}{}^z_a] = F_{ac}\, [F^{zc}]\,. \tag{A.13}$$

Por tanto, se tiene de (A.8) que

$$Q_a{}^b{}_{;\,b} = \quad F_{ac}\, [F^{cz}]\,. \tag{A.14}$$

La ecuación (A.14) puede ser renombrada como una “ecuación dinámica” asociada al campo gravitacional y gravitacional debido a fuentes concentradas en la hipersuperficie discoidal. El punto de partida para su obtención es la ley de conservación $T^{ab}{}_{;b} = 0$.

A.2. La Ecuación de la Electrogeodésica

Ahora se supone que el disco está constituido por la superposición de dos fluidos contrarrotantes, lo cual es, como ya se sabe, equivalente a escribir las relaciones

$$S_a{}^b \;=\; S_{a+}{}^b \;+\; S_{a-}{}^b, \tag{A.15a}$$

$$j^{\,b} \;=\; j_+^{\,b} \;+\; j_-^{\,b}, \tag{A.15b}$$

donde

$$S^{ab}_\pm = (\epsilon_\pm + p_\pm) U^a_\pm U^b_\pm + p_\pm h^{ab}, \tag{A.16}$$

Con, $S^{ab} = e^{\Lambda-\Phi}Q^{ab}$, de la ecuación (A.16) se tiene que

$$Q^{ab}_{\pm} = (\tilde{\epsilon}_{\pm} + \tilde{p}_{\pm})U^{a}_{\pm}U^{b}_{\pm} + \tilde{p}_{\pm}h^{ab}, \tag{A.17}$$

donde $\tilde{\kappa} = e^{\Phi-\Lambda}\kappa$. Después de un cálculo medio tedioso y algo aburrido, podemos obtener la derivada covariante de $Q_{\pm a}^{\ \ b}$, la cual es:

$$Q_{\pm a\ ;b}^{\ \ b} = (\tilde{\epsilon}_{\pm} + \tilde{p}_{\pm})U_{\pm\, a;b}U^{b}_{\pm} + \tilde{p}_{\pm,b}\, h_{a}^{\ b} + \tilde{p}_{\pm}\, h_{a\ ;b}^{\ b}, \tag{A.18}$$

así que, después de calcular la forma explícita de $h_{a\ ;b}^{\ b}$ se tiene

$$Q_{\pm a\ ;b}^{\ \ b} = -\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_{\pm} + \tilde{p}_{\pm})U_{\pm}^{b}U_{\pm}^{c}g_{bc,a} + \tilde{p}_{\pm,a} + \tilde{p}_{\pm}\ \delta^{r}_{\ a}\,(\Lambda-\Phi)_{,r}. \tag{A.19}$$

Ahora, de la ecuación (A.14) se tiene que

$$Q_{a\pm\ \ ;\,b}^{\ \ b} = F_{ab}j^{b}_{\pm}, \tag{A.20}$$

así, por reemplazar (A.19) en (A.20) se tiene

$$-\frac{1}{2}(\tilde{\epsilon}_{\pm} + \tilde{p}_{\pm})U_{\pm}^{b}U_{\pm}^{c}g_{bc,a} + \tilde{p}_{\pm,a} \quad + \quad \tilde{p}_{\pm}\delta^{r}_{\ a}(\Lambda-\Phi)_{,r} = F_{ac}\tilde{\sigma}_{\pm}U_{\pm}^{c} \tag{A.21}$$

donde, como antes, $\tilde{\kappa} = e^{\Phi-\Lambda}\kappa$. De (A.21) esperaríamos cuatro ecuaciones, una para cada valor de a. Sin embargo sólo se tiene una, dado que, excepto para $x^2 = r$, se tienen ecuciones triviales. Así se tiene

$$-\frac{1}{2}(\epsilon_{\pm} + p_{\pm})U_{\pm}^{b}U_{\pm}^{c}g_{bc,r} + \tilde{p}_{\pm,r} = F_{rc}\sigma_{\pm}U_{\pm}^{c}. \tag{A.22}$$

Ahora, $A_r = 0$, de modo que $F_{rc} = A_{c,r}$. Consecuentemente, con la sustitución de esta cantidad en la ecuación anterior se obtiene

$$-\frac{1}{2}(\epsilon_{\pm} + p_{\pm})U_{\pm}^{b}U_{\pm}^{c}g_{bc,r} + \tilde{p}_{\pm,r} = A_{c,r}\sigma_{\pm}U_{\pm}^{c}. \tag{A.23}$$

Ahora se desarrolla cada una de las sumatorias en (A.23). La primera:

$$U_{\pm}^{b}U_{\pm}^{c}g_{bc,r} = U_{\pm}^{0}U_{\pm}^{0}g_{00,r} + 2U_{\pm}^{0}U_{\pm}^{1}g_{01,r} + U_{\pm}^{1}U_{\pm}^{1}g_{11,r}, \tag{A.24}$$

El término de la derecha en (A.23) es, explícitamente,

$$A_{c,r}U_{\pm}^{c} = A_{0,r}U_{\pm}^{0} + A_{1,r}U_{\pm}^{1}, \tag{A.25}$$

luego, por sustituir (A.24) y (A.25) en (A.23) se obtiene finalmente

$$\frac{1}{2}(U_{\pm}^{0})^{2}(g_{00,r} + 2g_{01,r}\Omega_{\pm} + g_{11,r}\Omega_{\pm}^{2})(\epsilon_{\pm} + p_{\pm}) - p_{\pm,r} = -\sigma_{\pm}U_{\pm}^{0}\left(A_{t,r} + A_{\varphi,r}\Omega_{\pm}\right), \tag{A.26}$$

donde se ha llamado $\Omega_{\pm} = U_{\pm}^{1}/U_{\pm}^{0}$, y como se sabe $A_a = (A_t, A_{\varphi}, 0, 0)$. La ecuación (A.26) es la ecuación de la electrogeodésica para un disco delgado estacionario constituido por la superposición de dos fluidos contrarrotantes cargados eléctricamente, con presión radial. Costituye una generalización de la ecuaciones en la electrogeodésica presentada en [21].

Bibliografía

[1] *Observational Evidence for the Black Holes in the Universe*. edited by S. Chakrabarti, Kluwer, Dordrecht, 1999. 1

[2] H. Bateman. *Partial Differential Equations*. Dover, 1944. 27, 39

[3] M. C. Begelman. Evidence for black holes. *Science*, 300:1898, 2003. 4

[4] F. Bertola - et al. Counterrotating stellar disks in early-type spirals: Ngc 3593. *Ap. J.*, 458:L67, 1996. 3

[5] J. Bičák and T. Ledvinka. Relativistic disks as sources of the Kerr metric. *Phys. Rev. Lett.*, 71:1669, 1993. 2, 3, 12

[6] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and J. Katz. Relativistic disk as sources of static vacuum spacetimes. *Phys. Rev. D*, 47:4334, 1993. 2, 12

[7] J. Bičák, D. Lynden-Bell, and C. Pichon. Relativistic discs and flat galaxy models. *Pichon, Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 265:126, 1993. 2, 12

[8] W. A. Bonnor and A. Sackfield. The interpretation of some spheroidal metrics. *Comm. Math. Phys.*, 8:338, 1968. 2, 4

[9] W. B. Bonnor. Equilibrium of charged dust in general relativity. *Gen. Rel. Grav.*, 12:453, 1980. 4

[10] W. B. Bonnor. A model of a spheroidal body. *Class. Quantum Grav.*, 15:351, 1998. 4

[11] W. B. Bonnor and S. B. P. Wickramasuriya. Are very large gravitational redshifts possible. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 170:643, 1975. 4

[12] A. Celotti, J. C. Miller, and D. W. Sciama. Astrophysical evidence for the existence of black holes. *Class. Quantum Grav.*, 16:A3, 1999. 4

[13] A. Chamorro, R. Gregory, and J. M. Stewart. Static axisymmetric discs and gravitational collapse. *Proc. R. Soc. London*, A413:251, 1987. 2, 12

[14] Frederick J. Ernst. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. *Phys. Rev.*, 167:1175, 1968. 63

[15] Frederick J. Ernst. New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II. *Phys. Rev.*, 168:1415, 1968. 63

[16] J. J. Ferrando, J. A. Morales, and M. Portilla. Two-perfect fluid interpretation of and energy tensor. *Gen. Rel. Grav.*, 22:1021, 1990. 21, 22, 23

[17] J. Frauendiener and C. Klein. Exact relativistic treatment of stationary counterrotating dust disks: Physical properties. *Phys. Rev. D*, 63:084025, 2001. 3

[18] G. García-R. and G. A. González. Electrovacuum static counterrotating relativistic dust disks. *Phys. Rev. D*, 69:124002, 2004. 3, 12

[19] G. García-Reyes and G. A. González. Charged perfect fluid disks as sources of Taub-Nut-type spacetimes. *Phys. Rev. D*, 70:104005, 2004. 3

[20] G. García-Reyes and G. A. González. Counterrotating perfect fluid discs as sources of electrovacuum static spacetimes. *Class. Quantum Grav.*, 21:4845, 2004. 3, 21

[21] G. García-Reyes and G. A. González. Rotating and counterrotating relativistic thin disks as sources of stationary electrovacuum spacetimes. *Brazilian journal of physics*, 37:1094, 2007. 75, 81

[22] G. A. González and O. A. Espitia. Relativistic static thin disks: The counterrotating model. *Phys. Rev. D*, 68:104028, 2003. 2, 3, 12, 22, 52, 66, 75

[23] G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres, and P. A. Ospina. Finite Axisymmetric Charged Dust Disks Sources for Conformastatic Spacetimes. In K. E. Kunze, M. Mars, & M. A. Vázquez-Mozo, editor, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1122 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 280–283, May 2009. 78

[24] G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres, and V. M. Viña-Cervantes. Exact Static Axially Symmetric Thin Annular Dust Disks. In K. E. Kunze, M. Mars, & M. A. Vázquez-Mozo, editor, *American Institute of Physics Conference Series*, volume 1122 of *American Institute of Physics Conference Series*, pages 284–287, May 2009. 78

[25] G. A. González, A. C. Gutiérrez-Piñeres, and V. M. Viña-Cervantes. Relativistic static thin dust disks with an inner edge: An infinite family of new exact solutions. *Phys. Rev. D*, 79(12):124048, June 2009. 53, 77, 78

[26] G. A. González and Antonio C. Gutiérrez-Piñeres. Stationary axially symmetric relativistic thin disks. *Artículo en Preparación*. 4, 77

[27] G. A. González, Antonio C. Gutiérrez-Piñeres, and P. Ospina. Finite axisymmetric charged dust disks in conformastatic spacetimes. *Phys. Rev. D*, 78:064058, 2008. 25, 75, 78

[28] G. A. González and P. S. Letelier. Relativistic static thin discs with radial stress support. *Class. Quantum Grav.*, 16:479, 1999. 2, 12

[29] G. A. González and P. S. Letelier. Rotating relativistic thin disks. *Phys. Rev. D*, 62:064025, 2000. 2, 3, 4, 12, 75

[30] G. A. González and J. Reina. An infinite family of generalized Kalnajs disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc*, 371:1873, 2006. 6, 25, 28, 29, 32, 75

[31] Guillermo A. González and Antonio C. Gutiérrez-Pi neres. Counterrotating Dust Disk Around a Schwarzschild Black Hole: New Fully Integrated Explicit Exact Solution. *Revista Integración*, 26(2):123, 2008. 7, 35, 47, 76, 78

[32] M. Gürses. Sources for the Majumdar-Papapetrou space-times. *Phys. Rev. D*, 58:044001, 1998. 4

[33] A. C. Gutiérrez-P., G. García R., and G. A. González. Static solutions type Papapetrou of Einstein-Maxwell equations. *Revista Colombiana de Física*, 36:240, 2004. 6, 25

[34] A. C. Gutiérrez-Piñeres and G. A González. An Infinite Family of Magnetized Morgan-Morgan Relativistic Thin Disks. *International Journal of Theoretical Physics*, page 683, December 2011. 77

[35] A. C. Gutiérrez-Piñeres and G. A. González. An infinite family of relativistic magnetized finite thin disks. *Journal of Physics Conference Series*, 314(1):012090, 2011. 77

[36] Antonio C. Gutiérrez-Piñeres, G. A. González, and Norman Guerlebeck. Charged and electromagnetized Morgan-Morgan-type disks. *In Preparation*. 12, 78

[37] G. S. Hall and D. A. Negm. Physical structure of the energy-momentum tensor in general relativity. *Int. J. Theor. Phys.*, 25:405, 1986. 23

[38] J. B. Hartle and D. H. Sharp. Variational principle for the equilibrium of a relativistic, rotanting star. *Astrophys. J.*, 147:317, 1967. 1

[39] S. W. Hawking and G.F.R. Ellis. *The Large Scale Structure of Space-Time*. Cambridge University Press, Cambridge, England, 1973. 28, 40

[40] W. Israel. Singular hypresurfaces and thin shells in general relativity. *Nuovo Cimento*, 44B:1, 1966. 13

[41] W. Israel. Erratum-ibid; Nuovo Cim. 44b, 1, 1966. *Nuovo Cimento*, 44b:463, 1967. 13

[42] V. Karas, J-M. Hure, and O. Semerák. Gravitating discs around black holes. *Class. Quantum Grav.*, 21:R1, 2004. 2, 4

[43] J. Katz, J. Bičák, and D. Lynden-Bell. Disc sources for conformastationary metrics. *Class. Quantum Grav.*, 16:4023, 1999. 4, 17

[44] C. Klein. Counter-rotating dust rings around a static black hole. *Class. Quantum Grav.*, 14:2267, 1997. 3, 5

[45] C. Klein. Harrison transformation of hyperelliptic solutions and charged dust disks. *Phys. Rev. D*, 65:084029, 2002. 3

[46] C. Klein. Exact relativistic treatment of stationary black-hole-disk systems. *Phys. Rev. D*, 68:027501, 2003. 3, 5

[47] C. Klein and O. Richter. Exact relativistic gravitational field of a stationary counterrotating dust disk. *Phys. Rev. Lett.*, 83:2884, 1999. 3

[48] Ari Laor. Astrophysical evidence for massive black holes. *Phys. Rep.*, 311:451, 1999. 1

[49] T. Ledvinka, J. Bičák, and M. Zofka. Relativistic disks as sources of Kerr-Newman fields. In edited by T. Piran, editor, *in Procceding of 8th Marcel-Grossmann Meeting in General Relativity*, Singapore, 1999. World Scientific, Academic Press. 3

[50] J. P. S. Lemos. Self-similiar relativistic discs with pressure. *Class. Quantum Grav.*, 6:1219, 1989. 2

[51] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. Superposition of Morgan and Morgan discs with a Schwarzschild black hole. *Class. Quantum Grav*, 10:L75, 1993. 2, 5

[52] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. Exact general relativistic thin disks around black holes. *Phys. Rev D.*, 49:5135, 1994. 2, 5

[53] J. P. S. Lemos and P. S. Letelier. Two families of exact disks with a central black hole. *Int. J. Mod. Phys. D*, 5:53, 1996. 2, 5

[54] P. S. Letelier. Anisotropic fluids with two-perfect-fluid components. *Phys. Rev. D*, 22:807, 1980. 21

[55] P. S. Letelier. Exact general relativistic disks with magnetic fields. *Phys. Rev. D*, 60:104042, 1999. 3, 12

[56] P. S. Letelier and S. R. Oliveira. Exact self-gravitating disks and rings: A solitonic approach. *J. Math. Phys.*, 28:165, 1987. 2, 4, 53, 77

[57] P. S. Letelier and A. Wang. Space-time defects. *J. Math. Phys*, 36:3023, 1995. 14

[58] A. Lichnerowicz. Sur les ondes de choc gravitationnelles. *C.R. Acad. Sci.*, 273:528, 1971. 13

[59] L. Lindblom. Stationary stars are axisymetric. *Astrophys. J.*, 208:873, 1976. 1

[60] D. Lynden-Bell and S. Pineault. Relativistic disks I. Counter-rotating disks. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 185:679, 1978. 2

[61] D. Lynden-Bell and S. Pineault. Relativistic disks II. Self-similar disks in rotation. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 185:695, 1978. 2, 3

[62] L. Morgan and T. Morgan. Gravitational field of shells and disks in general relativity. *Phys. Rev. D*, 2:2756, 1970. 2, 12

[63] T. Morgan and L. Morgan. The gravitational field of a disk. *Phys. Rev.*, 183:1097, 1969. 2, 4, 5, 9, 12

[64] P. M. Morse and H. Fesbach. *Methods of Theoretical Physics*. McGraw-Hill, 1953. 27

[65] Antonio C. Gutiérrez-Pi neres and Guillermo A. González. Counterrotating Charged Dust Disk Around a Schwarzschild Black Hole: New Fully Integrated Explicit Exact Solution. *Colombiana de Física*, 42(2), 2010. 78

[66] Antonio C. Gutiérrez-Pi neres, Guillermo A. González, and Viviana M. Vi na Cervantes. A Family of Relativistic Charged Thin Disks with an Inner Edge. *Revista Integración*, 27(2):91, 2009. 78

[67] G. Neugebauer and R. Meinel. General relativistic gravitational field of a rigidly rotating disk of dust: Soluction in terms of ultraelliptic funtions. *Phys. Rev. Lett.*, 75:3046, 1995. 3

[68] A. Papapetrou and A. Hamouni. Couches simples de matière en relativité générale. *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 9:179, 1968. 13

[69] C. Pichon and D. Lynden-Bell. New sources for Kerr and other metrics: Rotating relativistic disc with pressure support. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 280:1007, 1996. 2, 3, 12

[70] E. Poisson. *A Relativist's Toolkit: The Mathematics of Black-Hole Mechanics*. Cambridge University Press, 2004. 13

[71] M. Rees. *in Black Holes and Relativistic Stars*. edited by R. Wald, University of Chicago Press, Chicago, 1998. 1

[72] H. Rix, D. Fisher M. Franx, and G. Illingworth. Ngc 4550: Laboratory for testing galaxy formation. *Ap. J*, 400:L5, 1992. 3

[73] V. C. Rubin, J. A. Graham, and J. D. P. Kenney. Cospatial couterrotating stellar disks in the Virgo E7/S0 galaxy ngc 4550. *Ap. J*, 394:L9, 1992. 3

[74] O. Semerák. Expulsion of external fields from extreme horizons: Example of an external gravitational field. *Czech. J. Phys.*, 52:11, 2002. 2, 5

[75] O. Semerák. *Gravitation: Following the Prague Inspiration (To celebrate the 60th birthday of Jiri Bičák)*. eds. O. Semerák and J. Podolský and M Žofka, (World Scientific, Singapore), 2002. 4, 5

[76] O. Semerák. Thin disc around a rotating black hole, but with support in-between. *Class. Quantum Grav.*, 19:3829, 2002. 2

[77] O. Semerák. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: III. *Class. Quantum Grav.*, 20:1613, 2003. 2, 5

[78] O. Semerák. Exact power-law discs around static black holes. *Class. Quantum Grav.*, 21:2203, 2004. 2, 5

[79] O. Semerák and M. Žácěk. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole: I. *Class. Quantum Grav.*, 17:1613, 2000. 2, 5

[80] O. Semerák and M. Žáček. Oscillations of static discs around Schwarzschild black holes: Effect of self-gravitation. *Pub. Astron. Soc. Japan*, 52:1067, 2000. 2, 5

[81] O. Semerák, M. Žáček, and T. Zellerin. Test-particle motion in superposed Weyl fields. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 308:705, 1999. 2, 5

[82] O. Semerák, T. Zellerin, and M. Žáček. (erratum: **322**, 207 (2001)). *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 308:691, 1999. 2, 5

[83] O. K. Sil'chenko, A. V. Moiseev, and V. L. Afanasiev. Two more disk galaxies with global gas counterrotation. *arXiv:0812.4349v1 [astro-ph]*, 2008. 3

[84] H. Stephani, D. Kramer, M. MacCallum, C. Hoenselaers, and E. Herlt. *Exact Solutions of Einstein's Field Equations*. Cambridge University Press, 2003. 9, 11, 36, 42, 48

[85] C. Struck. Galaxy collisions. *Physics Reports*, 321:1, 1999. 1

[86] J. L. Synge. *Relativity, the General Theory*. North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1966. 26

[87] A. H. Taub. Space-times with distribution valued curvature tensors. *J. Math. Phys.*, 21:1423, 1980. 13

[88] M. Ujevic and P. S. Letelier. Stability of general relativistic geometric thin disks. *Phys. Rev. D*, 70:084015, 2004. 2

[89] V. Varela. Construction of sources for Majumdar-Papapetrou spacetimes. *Gen. Rel. Grav.*, 35:1815, 2003. 4

[90] D. Vogt and P. S. Letelier. Exact general relativistic perfect fluid disks with halos. *Phys. Rev. D*, 68:084010, 2003. 2

[91] D. Vogt and P. S. Letelier. Exact relativistic static charged perfect fluid disks. *Phys. Rev. D*, 70:064003, 2004. 3, 12

[92] D. Vogt and P.S. Letelier. Exact relativistic static charged dust discs and non-axisymmetric structures. *Class. Quantum Grav.*, 21:3369, 2004. 4

[93] B. H. Voorhees. Relativistic disks I. background models. *Phys. Rev. D*, 5:2413, 1972. 2, 4

[94] M. Žácěk and O. Semerák. Gravitating discs around a Schwarzschild black hole II. *Czech. J. Phys.*, 52:19, 2002. 2, 5

[95] S. Weinberg. *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. John Wiley & Sons, 1972. 42

[96] T. Zellerin and O. Semerák. Two-soliton stationary axisymmetric sprouts from Weyl seeds. *Class. Quantum Grav.*, 17:5103, 2000. 2, 5